「듀어레이션」槪念의 展開 및 그 應用에 관한 小考

金 東 會*

〈目 次〉

Ⅰ. 序 說

一般的인 債券은 滿期日에 元金을 償還함은 물론 그 以前에도 정해진 「쿠폰」金額을 支給한다. 그러한 債券에 있어서 現金흐름의 期間에 관한 尺度로서 널리 이용되어 온 滿期까지의 期間은 단지 最終支給日에 관한 情報만을 제공할 뿐 最終支給日 以前에 發生하는 「쿠폰」金額의 크기 및 時期에 관한 必須的인 情報를 생략하고 있다. 따라서 滿期까지의 期間은 「쿠폰」債券의 期間에 대한 尺度로서는 不完全하다고 할 수 있다.

이러한 점에 착안하여 Frederick R. Macaulay는 「쿠폰」債券의 期間에 대한 보다 意味있고 要約된 尺度로서 「듀어레이션」槪念을 제의하였다. 그가 제의한 「듀어레이션」은 現金흐름의 現在價値를 加重値로 하는 期間의 加重平均으로 定義되는 것으로 最終支給額 뿐만 아니라 도중에 발생하는 現金흐름의 크기 및 그 時期를 고려하게 된다.

이와 같은 의도로 전개된 「듀어레이션」槪念은 그 후 여러 學者 및 實務者에 의해 資本資産의 分析내지는 管理를 위한 주요 수단으로 널리 應用되고 있다.

그 중에서 本稿는 주로 1) 債券收益率의 變動에 대한 債券價格의 變動과 관련되는 「듀어레이션」의 應用과 2) 未來의 豫想하지 않은 利子率의 變動으로 부터 債券의 價値를 保全하기 위한 「듀어레이션」의 應用에 대하여 考察하고자 한다. 이를 위해 本稿는 그 理論的 基礎로서 債券價格, 債券收益率 및 「듀어레이션」의 槪念 등에 대하여 먼저 檢討하게 될 것이다.

Ⅱ. 債券價格과 債券收益率

1. 債券의 價格

債券의 市場價格은 그 債券이 가져다 주는 未來現金흐름(「쿠폰」支給額 및 元金償還額)을 適

* 助敎授, 財務管理

切한 割引率로 資本還元한 現在價値로 定義된다. 이때 未來現金흐름을 資本還元하기 위해 使用되는 適切한 割引率은 未來에 實際하리라 豫想되는 期間別收益率에 의해 決定된다. 따라서 未來의 期間別收益率이 每期 一定하지 않다고 假定하고 또한 收益率의 期間構造에 관한 不偏期待假說(unbiased expectation hypothesis)에 따라 그러한 未來의 期間別收益率은 收益率의 期間構造에 내포된 先物利子率(forward interest rate)과 같다고 假定하면,[1] 債券의 市場價格은 一般的으로 다음의 식으로 定義된다.

$$P=\frac{C_1}{(1+r_1)}+\frac{C_2}{(1+r_1)(1+r_2)}+\cdots\cdots+\frac{C_m+F}{(1+r_1)(1+r_2)\cdots(1+r_m)}$$

$$=\sum_{n=1}^{m}\frac{C_n}{\prod_{t=1}^{n}(1+r_t)}+\frac{F}{\prod_{t=1}^{m}(1+r_t)} \qquad (2\text{-}1)$$

P=債券의 價格

C_n=n期의 「쿠폰」支給額

F=元金償還額

r_t=t期의 期間別收益率(先物利子率)

n=「쿠폰」支給日까지의 期間

m=滿期까지의 期間

이에 따라 每期마다 一定한 「쿠폰」金額을 支給하고 滿期에 額面金額을 償還하는 「쿠폰」債券(coupon bond)의 價格은

$$P=\frac{C}{(1+r_1)}+\frac{C}{(1+r_1)(1+r_2)}+\cdots\cdots+\frac{C+F}{(1+r_1)(1+r_2)\cdots(1+r_m)}$$

$$=\sum_{n=1}^{m}\frac{C}{\prod_{t=1}^{n}(1+r_t)}+\frac{F}{\prod_{t=1}^{m}(1+r_t)} \qquad (2\text{-}2)$$

로 決定된다. 또한 도중에 「쿠폰」金額을 支給하지 않고 滿期에 元金만을 償還하는 純粹割引債券(zero-coupon bond)의 價格은

$$P=\frac{F}{(1+r_1)(1+r_2)\cdots(1+r_m)}$$

$$=\frac{F}{\prod_{t=1}^{m}(1+r_t)} \qquad (2\text{-}3)$$

로 決定된다.

한편, 未來의 現金흐름을 資本還元하기 위한 割引率로서 未來의 期間別收益率 대신에 편의상 債券의 滿期收益率을 利用하여 債券의 價格을 다음과 같이 表現하기도 한다. 즉

1) 本稿에서는 收益率, 利子率 및 割引率이라는 槪念을 同義語로 사용한다.

$$P=\frac{C_1}{(1+R)}+\frac{C_2}{(1+R)^2}+\cdots\cdots+\frac{C_m+F}{(1+R)^m}$$

$$=\sum_{t=1}^{m}\frac{C_t}{(1+R)^t}+\frac{F}{(1+R)^m} \qquad (2\text{-}4)$$

R=滿期收益率

이 경우에 전술한 「쿠폰」債券의 價格은

$$P=\frac{C}{(1+R)}+\frac{C}{(1+R)^2}+\cdots\cdots+\frac{C+F}{(1+R)^m}$$

$$=\sum_{t=1}^{m}\frac{C}{(1+R)^t}+\frac{F}{(1+R)^m} \qquad (2\text{-}5)$$

로 表現되며, 純粹割引債券의 價格은

$$P=\frac{F}{(1+R)^m} \qquad (2\text{-}6)$$

로 表現된다. 또한 元金의 償還없이 一定한 「쿠폰」金額을 永久히 支給하는 永久債券(perpetual bond)의 價格은 간단히

$$P=\frac{C}{R} \qquad (2\text{-}7)$$

로 表現된다.

2. 債券收益率

債券收益率(bond yield)이란 債券에 投資함으로써 얻게 되는 一定期間동안의 收益을 投資元本으로 나누어 投資期間으로 換算한 것을 말하며 一般的으로 年率로 表示된다. 이러한 債券收益率은 관점에 따라 여러가지로 구분할 수 있는데, 여기서는 滿期收益率과 保有期間收益率만을 다루기로 한다.

1) 滿期收益率

債券의 滿期收益率(yield to maturity)은 債券에 投資하여 이를 滿期까지 保有한다고 가정할 경우에 얻게 되는 收益率로서, 일반적으로 債券이 滿期까지의 期間동안 가져다 주는 未來現金흐름의 現在價値와 그 債券의 市場價格을 일치시키는 割引率로 定義된다. 즉 滿期收益率은 「쿠폰」債券의 경우에 다음의 식

$$P=\frac{C}{(1+R)}+\frac{C}{(1+R)^2}+\cdots\cdots\cdots+\frac{C+F}{(1+R)^m} \qquad (2\text{-}8)$$

을 충족시키는 割引率 R이다.

이러한 滿期收益率의 意味는 위의 식 (2—8)의 양변에 $(1+R)^m$을 곱하면 구체적으로 알 수 있다.

$$P(1+R)^m=C(1+R)^{m-1}+C(1+R)^{m-2}+\cdots\cdots\cdots+C+F \qquad (2\text{-}9)$$

變形된 式 (2-9)에서 債券의 滿期收益率은 債券에의 投資金額이 滿期까지의 期間동안 每期마다 買入時의 滿期收益率로 複利運用된다는 것을 前提로 하고 있다는 점을 알 수 있다. 이는 곧 債券의 買入후 얻게 되는 「쿠폰」金額을 買入時의 滿期收益率로 每期마다 複利로 再投資함으로써 그러한 滿期收益率을 얻을 수 있다는 것을 의미한다. 따라서 債券의 滿期收益率은 그 債券의 買入후에 發生할지도 모르는 再投資率의 變動 즉 未來의 期間別收益率의 變動을 고려하지 않고 있다고 할 수 있다.

한편 純粹割引債券의 滿期收益率은

$$P=\frac{F}{(1+R)^m} \tag{2-10}$$

을 만족시키는 割引率 R이 된다. 이러한 純粹割引債券에 있어서는 도중에 「쿠폰」金額이 支給되지 않으므로 「쿠폰」金額의 再投資問題가 발생하지 않는다. 따라서 純粹割引債券의 滿期收益率은 아래의 式과 같이 未來의 期間別收益率의 幾何平均(geometric mean)으로 表現될 수 있다.[2]

$$R=\sqrt[m]{(1+r_1)(1+r_2)\cdots(1+r_m)}-1 \tag{2-11}$$

2) 保有期間收益率

債券의 保有期間收益率(holding period return)은 債券을 어느 一定期間동안 保有한다고 假定하고 또한 그 期間동안 受取하게 될 모든 現金흐름을 未來의 期間別收益率로 再投資한다고 가정할 경우에 얻게 되는 收益率로서, 이를 式으로 나타내면 다음과 같다.

$$h(0,n)=\sqrt[n]{\frac{FV}{P}}-1 \tag{2-12}$$

$h(0,n)$=保有期間收益率

P=投資金額 즉 債券價格

FV=保有期間동안 얻게 되는 모든 現金흐름의 未來價値

n=保有期間

위의 式 (2-12)에서 「쿠폰」債券의 경우에 未來價格 FV는

$$FV=C(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_n)+C(1+r_3)(1+r_4)\cdots(1+r_n)+\cdots\cdots+C+P_n$$

P_n=保有期間末의 債券價格

가 되며, 또한 債券의 價格 P는

$$P=\frac{C(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_n)+C(1+r_3)(1+r_4)\cdots(1+r_n)+\cdots\cdots+C+P_n}{(1+r_1)(1+r_2)\cdots\cdots(1+r_n)}$$

가 되므로, 「쿠폰」債券의 保有期間收益率은

$$h(0,n)=\sqrt[n]{(1+r_1)(1+r_2)\cdots\cdots(1+r_n)}-1 \tag{2-13}$$

2) William F. Sharpe, *Investments*, 3rd, ed. (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1985), p.322.

로 表現될 수 있다. 마찬가지로 純粹割引債券의 경우에도 保有期間收益率은

$$h(0,n)=\sqrt[n]{\frac{FV}{P}}-1$$

$$=\sqrt[n]{(1+1_1)(1+r_2)\cdots\cdots(1+r_n)}-1 \qquad (2\text{-}14)$$

로 表現될 수 있다. 이와 같이 保有期間收益率은 항상 未來의 期間別收益率의 幾何平均으로 주어진다.

그리고 保有期間收益率은 保有期間동안 얻게 되는 「쿠폰」金額이 未來의 期間別收益率로 再投資된다는 것을 가정하므로 滿期收益率과는 달리 債券의 買入후에 發生할지도 모르는 再投資率의 變動을 고려할 수 있으며 또한 滿期以前의 保有期間末에 나타날지도 모르는 債券價格의 變動을 고려할 수 있다는 特徵이 있다.

3) 滿期收益率과 保有期間收益率의 比較

前述한 바와 같이 債券의 滿期收益率은 「쿠폰」金額이 單一의 값으로 주어지는 買入時의 滿期收益率로 再投資된다는 것을 前提로 하고 있는 반면에, 債券의 保有期間收益率은 「쿠폰」金額이 未來의 時點에 따라 각기 달리 나타날 수 있는 期間別收益率로 再投資된다는 것을 前提로 하고 있다. 따라서 未來의 期間別收益率이 時間의 경과에 따라 上昇할 경우 즉 收益率의 期間構造가 右上向하는 形態를 취할 경우에, 同一한 期間에 대해 「쿠폰」債券의 滿期收益率은 그 債券의 保有期間收益率보다 낮고 (그림 1—a), 반대로 未來의 期間別收益率이 時間의 경과에 따라 下落할 경우 즉 收益率의 期間構造가 右下向하는 形態를 취할 경우에, 同一한 期間에 대해 「쿠폰」債券의 滿期收益率은 그 債券의 保有期間收益率보다 높다 (그림 1—b). 만일 未來의 期間別收益率이 每期 一定한 경우 즉 收益率의 期間構造가 水平形態를 취할 경우에는, 同一한 期間에 대해 「쿠폰」債券의 滿期收益率은 그 債券의 保有期間收益率과 같게 된다 (그림 1-c).

그러나 式 (2—11)과 式 (2—14)에서 알 수 있는 바와 같이 純粹割引債券에 있어서는 收益率의 期間構造의 形態와는 關係없이 同一한 期間에 대해 滿期收益率과 保有期間收益率은 항상 같다.[3)]

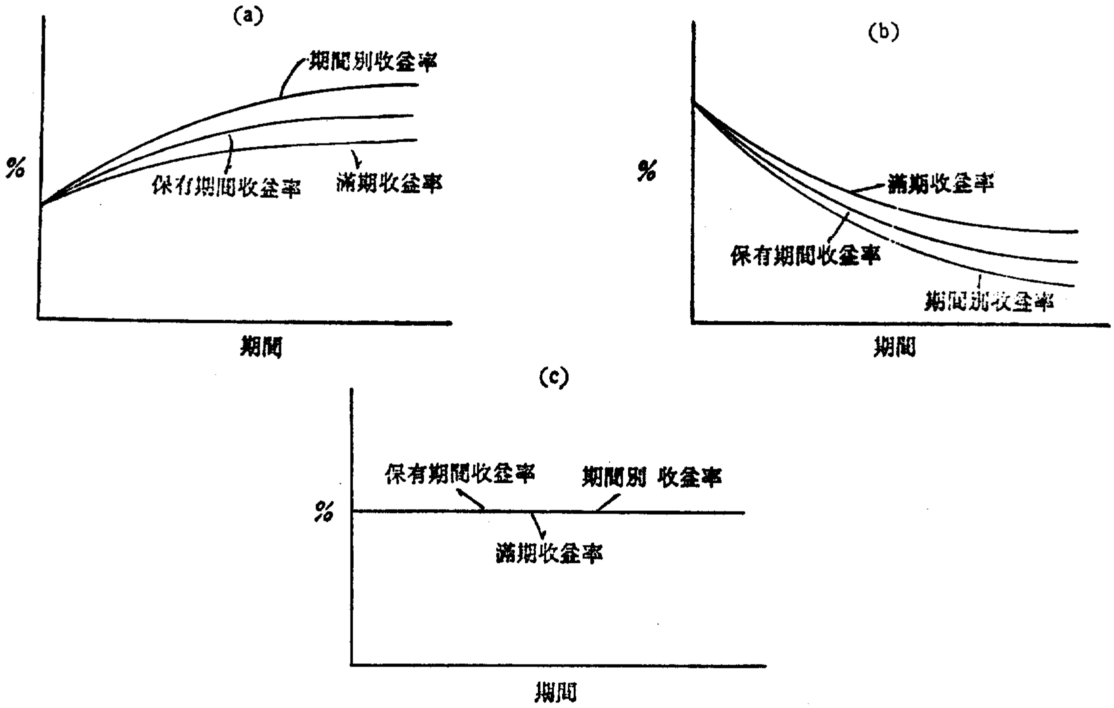
3. 債券價格과 債券收益率의 關係

滿期收益率에 의해 表現된 債券價格의 評價模型 즉

$$P=\sum_{t=1}^{m}\frac{C_t}{(1+R)^t}+\frac{F}{(1+R)^m} \qquad (2\text{-}4)$$

에서 알 수 있는 바와 같이, 債券의 價格은 1) 「쿠폰」利子率, 2) 주어진 滿期收益率의 크기 및 3)滿期까지의 期間 등 세가지 주된 變數에 의해 영향을 받는다. 이 외에도 債務不履行危險, 隨

3) 이상의 滿期收益率과 保有期間收益率의 比較에 관한 구체적인 證明은 G.O. Bierwag, "Immunization, Duration and the Term Structure of Interest Rates," *Journal of Financial and Quantitative Analysis* (December 1977), pp. 727-730을 참조할 것.



〈그림－1〉「쿠폰」債券의 滿期收益率과 保有期間收益率의 比較

資料源 : William F. Sharpe, *Investments*, 3rd. ed. (Englewood Cliffs, N. J. : Prentice Hall, Inc., 1985), p. 319 에서 再作成.

意償還危險 및 稅金規定 등도 債券의 價格에 영향을 미치는 要素로 들 수 있으나, 여기서는 이러한 要素는 고려하지 않기로 한다.

債券價格과 債券收益率의 關係에 있어서 가장 基本的인 性質은 위의 식(2－4)에서 직관적으로 알 수 있는 바와 같이 債券의 價格이 그 債券의 收益率과 反對方向으로 움직인다는 것이다. 즉 債券收益率이 上昇하면 債券價格은 下落하게 되고, 반대로 債券收益率이 下落하면 債券價格은 上昇하게 된다.

그러나 債券收益率이 債券價格에 미치는 이러한 영향은 모든 債券에 대해 一定한 것은 아니다. 일반적으로 주어진 債券收益率의 變動에 대한 債券價格의 變動은 그 債券의 1)「쿠폰」利子率, 2) 주어진 債券收益率의 水準 및 3) 滿期까지의 期間에 따라 달라질 수 있다. 이와 관련하여 다음의 세가지 法則이 널리 이용되고 있다. 즉 주어진 債券收益率의 「베이시스 포인트」變動(basis point change)에 대한 債券價格의 「퍼센티지」變動(percentage change)은 다른 條件이 同一하다면

(1)「쿠폰」利子率이 낮을수록

(2) 주어진 滿期收益率의 水準이 낮을수록

(3) 滿期까지의 期間이 길수록

커진다는 것이 그것이다.[4] 그러나 이러한 세가지 法則은 모든 債券에 대해 항상 適用되지는 않는다.

여기서는 다음의 表를 이용하여 이러한 現象을 구체적으로 살펴 보고자 한다. 〈表－1〉은 주어진 滿期收益率이 각각 4%, 6%, 8%인 경우에 額面價가 10,000원인 債券(年2回 利子支給)의 價格을 구한 것이며, 〈表－2〉는 〈表－1〉에 주어진 滿期收益率이 各各 100「베이시스 포인트」上昇할 경우에 그 債券의 價格을 구한 것이다. 이 두가지 表를 종합하면 주어진 滿期收益率의 100「베이시스 포인트」上昇에 대한 債券價格의 「퍼센티지」變化를 알 수 있는데 그것은 〈表－3〉에 表示되어 있다.

〈表 1〉 債券價格(額面價 10,000원, 年 2回 利子支給) (원)

滿期期間까지의(年)	滿期收益率 4% 쿠폰利子率 2%	4%	6%	8%	滿期收益率 6% 쿠폰利子率 2%	4%	6%	8%	滿期收益率 8% 쿠폰利子率 2%	4%	6%	8%
1	9,805.8	10,000.0	10,194.1	10,388.3	9,617.3	9,808.6	10,000.0	10,191.3	9,434.1	9,622.7	9,811.3	10,000.0
5	9,101.7	10,000.0	10,898.2	11,796.5	8,293.9	9,146.9	10,000.0	10,853.0	7,566.7	8,377.8	9,188.9	10,000.0
10	8,364.8	10,000.0	11,635.1	13,270.2	7,024.5	8,512.2	10,000.0	11,487.7	5,922.9	7,281.9	8,640.9	10,000.0
20	7,264.4	10,000.0	12,735.5	15,471.0	5,377.0	7,688.5	10,000.0	12,311.4	4,062.1	6,041.4	8,020.7	10,000.0
40	6,025.5	10,000.0	13,974.4	17,948.9	3,959.8	6,979.9	10,000.0	13,020.0	2,825.3	5,216.9	7,608.4	10,000.0
100	5,095.2	10,000.0	14,904.7	19,809.4	3,351.3	6,675.6	10,000.0	13,324.3	2,502.9	5,001.9	7,500.9	10,000.0
∞	5,000.0	10,000.0	15,000,0	20,000.0	3,333.3	6,666.7	10,000.0	13,333.3	2,500.0	5,000.0	7,500.0	10,000.0

資料源: David M. Darst, *The Handbook of the Bond and Money Markets* (New York: McGraw-Hill, Inc., 1981), pp. 307～338에서 再作成.

〈表 2〉 債券價格(額面價 10,000원, 年 2回 利子支給) (원)

滿期期間까지의(年)	滿期收益率 5% 쿠폰利子率 2%	4%	6%	8%	滿期收益率 7% 쿠폰利子率 2%	4%	6%	8%	滿期收益率 9% 쿠폰利子率 2%	4%	6%	8%
1	9,710.8	9,903.6	10,096.3	10,289.1	9,525.0	9,715.0	9,905.0	10,094.9	9,344.5	9,531.5	9,719.0	9,906.3
5	8,687.1	9,562.3	10,437.6	11,312.8	7,920.2	8,752.5	9,584.1	10,415.8	7,230.5	8,021.8	8,813.0	9,604.3
10	7,661.6	9,220.5	10,779.4	12,338.3	6,446.8	7,868.1	9,289.3	10,710.6	5,447.2	6,748.0	8,048.8	9,349.6
20	6,234.5	8,744.8	11,255.1	13,765.4	4,661.2	6,796.7	8,932.2	11,067.7	3,559.4	5,399.6	7,239.7	9,079.9
40	4,832.2	8,277.4	11,722.5	15,167.7	3,312.8	5,987.6	8,662.5	11,337.4	2,452.1	4,603.6	6,765.1	8,921.7
100	4,042.9	8,014.3	11,985.6	15,957.0	2,864.4	5,718.6	8,572.8	11,427.1	2,223.3	4,445.2	6,667.1	8,889.0
∞	4,000.0	8,000.0	12,000.0	16,000.0	2,857.1	5,714.3	8,571.4	11,428.6	2,222.2	4,444.4	6,666.7	8,888.9

資料源: David M. Darst, *op. cit.*

4) G. O. Bierwag, George G. Kaufman, and Chulsoon Khang, "Duration and Bond Portfolio Analysis: An Overview," *Journal of Financial and Quantitative Analysis* (November 1978), p. 673.

〈表-3〉 滿期收益率의 100「베이시스 포인트」上昇에 따른 債券價格의 「퍼센티지」變化 (%)

滿期까지의 期間 (年)	滿期收益率											
	4%에서 5%로 變化				6%에서 7%로 變化				8%에서 9% 變化			
	쿠폰利子率				쿠폰利子率				쿠폰利子率			
	2%	4%	6%	8%	2%	4%	6%	8%	2%	4%	6%	8%
1	−1.0	−1.0	−1.0	−1.0	−1.0	−1.0	−1.0	−0.9	−0.9	−0.9	−0.9	−0.9
5	−4.6	−4.4	−4.2	−4.1	−4.5	−4.3	−4.2	−4.0	−4.4	−4.3	−4.1	−4.0
10	−8.4	−7.8	−7.4	−7.0	−8.2	−7.6	−7.1	−6.8	−8.0	−7.3	−6.9	−6.5
20	−14.2	−12.6	−11.6	−11.0	−13.3	−11.6	−10.7	−10.1	−12.4	−10.6	−9.7	−9.2
40	−19.8	−17.2	−16.1	−15.5	−16.3	−14.2	−13.4	−12.9	−13.2	−11.7	−11.1	−10.8
100	−20.7	−19.9	−19.6	−19.4	−14.5	−14.4	−14.3	−14.2	−11.2	−11.1	−11.1	−11.1
∞	−20.0	−20.0	−20.0	−20.0	−14.3	−14.3	−14.3	−14.3	−11.1	−11.1	−11.1	−11.1

1) 「쿠폰」利子率과 債券價格의 變動

〈表−3〉에서 예를 들어 滿期까지의 期間이 10年이고 滿期收益率이 8%인 債券에 있어서, 滿期收益率이 100「베이시스 포인트」 上昇 즉 9%로 上昇함에 따라, 그 債券의 價格은 「쿠폰」利子率이 8%인 경우에 6.5% 下落하고, 「쿠폰」利子率이 6%인 경우에 6.9% 下落하며, 「쿠폰」利子率이 4%인 경우에 7.3% 下落하며, 「쿠폰」利子率이 2%인 경우에 8.0% 下落한다는 것을 알 수 있다. 이와 같은 예들로부터 주어진 滿期收益率의 變化에 대하여 債券價格의 相對的 變動은 다른 條件이 동일하다면 「쿠폰」利子率이 낮을수록 보다 커진다는 (法則 1)을 발견하게 된다. 그러나 예를 들어 〈表−3〉에서 주어진 滿期收益率이 8%인 永久債券에 있어서는 주어진 滿期收益率의 100「베이시스 포인트」 上昇에 대한 그 債券價格의 下落이 「쿠폰」利子率과는 無關하게 항상 11.1%로 주어진다는 것을 알 수 있다. 따라서 永久債券의 경우에는 「쿠폰」利子率과는 無關하게 주어진 滿期收益率의 「베이시스 포인트」 變動에 대한 債券價格의 「퍼센티지」 變動이 항상 一定하다는 하나의 例外를 발견하게 된다.

「쿠폰」利子率의 크기가 債券價格에 미치는 이러한 영향을 「쿠폰」効果(coupon effect)라고 한다. 이러한 現象이 나타나는 理由는 「쿠폰」利子率이 낮을수록 投資者에게 주어지는 總收益의 대부분이 가까운 「쿠폰」支給日로 부터 割引되는 「쿠폰」支給額보다 滿期時의 元金償還額에 의해 더 큰 영향을 받기 때문이다. 그래서 「쿠폰」利子率이 높은 債券보다 「쿠폰」利子率이 낮은 債券에 있어서 眞正한 滿期("true" maturity)는 길다고 할 수 있다. 이것을 달리 말하면 「쿠폰」利子率이 낮은 債券보다는 「쿠폰」利子率이 높은 債券의 경우에 投資者는 그들의 收益을 보다 빨리 實現하게 된다는 것이다.[5)]

이러한 「쿠폰」効果는 債券의 期間에 관한 尺度로서 널리 이용되어 온 滿期까지의 期間의 有

5) James C. Van Horne, *Financial Market Rates and Flows*, 2nd. ed. (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1984), pp.134~136.

用性에 의문을 제기하여 뒤에 설명할 「듀어레이션」槪念을 전개하게 되는 계기를 가져다 주었다.

2) 주어진 滿期收益率의 水準과 債券價格의 變動

〈表－3〉에서 예를 들어 滿期까지의 期間이 10年이고 「쿠폰」利子率이 8%인 債券에 있어서 滿期收益率의 동일한 100「베이시스 포인트」上昇에 대하여 債券의 價格은 주어진 滿期收益率이 8%인 경우에 6.5% 下落하고, 주어진 滿期收益率이 6%인 경우에 6.8% 下落하며, 주어진 滿期收益率이 4%인 경우에 7.0% 下落한다는 것을 알 수 있다. 이와 같은 예들로부터 주어진 滿期收益率의 「베이시스 포인트」變動에 대한 債券價格의 「퍼센티지」變動은 다른 조건이 同一하다면 주어진 滿期收益率의 水準이 낮을수록 보다 커진다는 (法則 2)를 발견하게 된다. 이 法則은 영구채권은 물론 割引債券의 경우에도 適用된다.

3) 滿期까지의 期間과 債券價格의 變動

〈表－3〉에서 예를 들어 「쿠폰」利子率이 8%이고 滿期收益率이 6%인 債券에 있어서 주어진 滿期收益率이 100「베이시스 포인트」上昇함에 따라 그 債券의 價格은 滿期까지의 期間이 1年에서 5年, 10年……으로 길어질 경우에 0.9%에서 4.0%, 6.8%…… 下落한다는 것을 알 수 있다. 이러한 예들로부터 주어진 滿期收益率의 變動에 대한 債券價格의 相對的 變動은 다른 조건이 동일하다면 滿期까지의 期間이 길수록 보다 커진다는 (法則 3)을 발견할 수 있다.

그러나 이 法則은 額面發行債券(par bonds) 또는 割增發行債券(premium bonds)의 경우에만 적용된다. 예를 들어 〈表－3〉에서 「쿠폰」利子率이 2%이고 滿期收益率이 6%인 割引發行債券(discount bonds)에 있어서 주어진 滿期收益率의 變化에 대한 債券價格의 相對的 變動은 滿期까지의 期間이 40年까지는 커지다가 그 期間을 지나서부터는 작아진다는 것을 알 수 있다. 이와 같은 예에서 割引發行債券의 경우에는 주어진 滿期收益率의 「베이시스 포인트」變動에 대한 債券價格의 「퍼센티지」變動은 다른 조건이 동일하다면 滿期까지의 期間이 길수록 어느 期間까지는 커지다가 그 期間을 지나면 작아진다는 또 다른 例外를 발견하게 된다.

이상에서 검토한 내용을 要約하면 다음과 같다. 즉 다른 조건이 동일하다면, 주어진 債券收益率의 「베이시스 포인트」變動에 대하여 債券價格의 「퍼센티지」變動은

1) 「쿠폰」利子率이 낮을수록 커진다. 단, 永久債券의 경우에는 「쿠폰」利子率과는 無關하게 항상 일정하다.

2) 주어진 滿期收益率의 水準이 낮을수록 커진다.

3) 滿期까지의 期間이 길수록 커진다. 단, 割引發行債券의 경우에는 어느 滿期까지의 期間동안에는 체감율로 커지다가 그 기간을 넘어서면 다시 작아진다.

Ⅲ. 「듀어레이션」의 意義 및 性質

1. 「듀어레이션」의 意義

「듀어레이션」(duration)은 債券의 期間에 대해 滿期보다 더 完全하고 要約된 尺度를 제공하기 위해서 Frederick R. Macaulay가 1938年에 처음으로 소개한 槪念이다.[6] 그는 滿期까지의 期間이 단지 最終支給日에 관한 情報만을 제공할 뿐 最終支給日 以前에 발생하는 「쿠폰」金額의 크기 및 그 時期에 관한 必須的인 情報를 생략하고 있으므로 債券의 期間에 관한 尺度로서는 不適切하다는 점을 분명히 하였다. 그리하여 그는 滿期까지의 期間보다도 더 意味있고 要約된 尺度로서 다음과 같은 「듀어레이션」을 제의하였다.

$$D=\frac{\sum tC_tP(t)}{\sum C_tP(t)} \tag{3-1}$$

D=「듀어레이션」

C_t=「쿠폰」支給額 및 元金償還額

$P(t)$=t期에 얻게 될 1원의 現在價値

식 (3−1)에서 보는 바와 같이 債券의 「듀어레이션」은 元金償還額 뿐만 아니라 「쿠폰」金額을 포함한 각 支給額까지의 期間을 모든 現金흐름의 總現在價値에 대한 支給額 各各의 現在價値의 比率을 加重値로 하여 平均한 加重平均期間으로 定義된다. 이는 곧 債券이 平均的인 現在價値를 가져다 주는 現在로부터의 時間의 길이를 나타낸다. 그래서 債券의 「듀어레이션」은 그 債券의 平均壽命으로 간주될 수 있다.[7]

그리고 식 (3−1)에서의 現價函數 $P(t)$는 未來 各 期間의 利子率을 推定함으로써 구해진다. 그러나 Macaulay는 計算上의 편의를 위해 割引率로서 滿期收益率을 이용하여 現在價値를 計算하였다. 債券의 「듀어레이션」을 滿期收益率에 의해 表現하면 다음과 같이 定義된다.

$$D_1=\frac{\sum_{t=1}^{m}\frac{tC_t}{(1+R)^t}+\frac{mF}{(1+R)^m}}{\sum_{t=1}^{m}\frac{C_t}{(1+R)^t}+\frac{F}{(1+R)^m}} \tag{3-2}$$

C=「쿠폰」支給額

F=元金償還額

t=「쿠폰」支給日까지의 期間

m=滿期까지의 期間

R=滿期收益率

6) Frederick R. Macaulay, *Some Theoretical Problems Suggested by the Movement of Interest Rates, Bond Yields, and Stock Prices in the United States Since 1856* (New York: National Bureau of Economic Research, 1938), pp. 44-53.

7) Roman L. Weil, "Macaulay's Duration: An Appreciation," *Journal of Business* (October 1973), p. 589.

만일 連續複割引(continuous compounding and discounting)을 가정한다면 債券의 「듀어레이션」은

$$D_2 = \frac{\sum_{t=1}^{m} tC_t \exp(-Rt) + mF \exp(-Rm)}{\sum_{t=1}^{m} C_t \exp(-Rt) + F \exp(-Rm)} \tag{3-3}$$

로 表現된다.

2. 「듀어레이션」의 一般的 性質

식 (3—2)의 「듀어레이션」의 정의에서 알 수 있는 바와 같이, 그것은 1) 滿期收益率, 2) 「쿠폰」金額 및 元金 등의 現金흐름, 3) 滿期까지의 기간 등의 세가지 주된 변수에 의해 決定된다. 다음의 〈表-4〉를 이용하여 이러한 세가지 변수와 「듀어레이션」과의 관계를 구체적으로 살펴보기로 한다. 〈表-4〉는 年 2回 利子를 支給하는 債券의 「듀어레이션」을 1) 滿期收益率, 2) 「쿠폰」利子率 및 3) 滿期까지의 期間을 달리하여 구한 것이다.

〈表 4〉 年 2回 利子를 支給하는 債券의 「듀어레이션」 (年)

滿期까지의 期間 (年)	約束된 滿期收益率 4%				6%				8%			
	쿠폰利子率				쿠폰利子率				쿠폰利子率			
	2%	4%	6%	8%	2%	4%	6%	8%	2%	4%	6%	8%
1	0.995	0.990	0.986	0.981	0.995	0.990	0.985	0.981	0.995	0.990	0.985	0.981
5	4.770	4.581	4.423	4.290	4.756	4.558	4.393	4.254	4.742	5.533	4.361	4.218
10	9.007	8.339	7.859	7.497	8.891	8.169	7.662	7.286	8.762	7.986	7.454	7.067
20	15.837	13.951	12.876	12.181	14.981	12.980	11.904	11.232	14.026	11.966	10.922	10.292
50	25.379	21.980	20.629	19.903	19.452	17.129	16.273	15.829	14.832	13.466	12.987	12.743
100	26.416	25.014	24.535	24.293	17.567	17.232	17.120	17.064	13.097	13.029	13.006	12.995
∞	25.500	25.500	25.500	25.500	17.167	17.167	17.167	17.167	13.000	13.000	13.000	13.000

資料源: Lawrence Fisher and Roman L. Weil, "Coping with the Risk of Interest-Rate Fluctuations: Returns to Bondholders from Naive and Optimal Strategies," *Journal of Business* (October 1971), p.418.

1) 「쿠폰」利子率과 「듀어레이션」

다른 모든 조건이 동일하다면, 債券의 「듀어레이션」은 「쿠폰」利子率이 낮을수록 길어진다. 예를 들어 〈表-4〉에서 滿期가 10年, 滿期收益率이 8%인 債券에 있어서 「쿠폰」利子率이 8%에서 6%, 4%, 2%로 낮아짐에 따라 그 債券의 「듀어레이션」은 7.067年에서 7.454年, 7.986年, 8.762年으로 길어진다는 것을 알 수 있다. 그러나 滿期가 정해져 있지 않는 영구채권의 「듀어

레이션」은 「쿠폰」利子率과는 無關하게 항상 $(r+p)/rp$ 年으로 일정하게 주어진다.[8] 여기서 r은 滿期收益率이며 p는 1年 동안 「쿠폰」利子가 支給되고 複利運用되는 回數이다.

2) 주어진 滿期收益率의 水準과 「듀어레이션」

다른 모든 조건이 동일하다면, 채권의 「듀어레이션」은 주어진 滿期收益率의 水準이 낮을수록 길어진다. 〈表-4〉에서 「쿠폰」利子率이 8%, 滿期가 10年인 債券에 있어서 滿期收益率이 8%에서 6%로 그리고 4%로 낮아짐에 따라 그 債券의 「듀어레이션」은 7.067年에서 7.286年으로 그리고 7.497年으로 길어진다는 것을 알 수 있다.

3) 滿期까지의 期間과 「듀어레이션」

식 (3−2)에서 직관적으로 알 수 있는 바와 같이 순수할인채권의 「듀어레이션」은 항상 그 債券의 滿期와 同一하다. 그러나 「쿠폰」債券의 「듀어레이션」은 항상 그 債券의 滿期보다 짧다.

그러나 「듀어레이션」과 滿期까지의 期間과의 關係는 앞서 논의한 「쿠폰」利子率 및 滿期收益率과의 關係에서 처럼 그렇게 간단하지는 않다.

액면발행채권 또는 割增發行債券에 있어서 「듀어레이션」은 滿期까지의 期間이 길어짐에 따라 增加하나 비례하여 增加하지 않고 체감율로 증가한다. 예를 들어 〈表-4〉에서 滿期收益率이 8%, 「쿠폰」利子率이 8%인 額面發行債券에 있어서 「듀어레이션」은 만기까지의 期間이 길어짐에 따라 체감율로 증가함을 확인할 수 있다. 그러나 割引發行되는 債券에 있어서 「듀어레이션」은 滿期까지의 期間이 길어짐에 따라 상당히 긴 어느 滿期까지의 期間에 대해서는 체감율로 증가하다가 그 기간을 넘어서면 다시 감소한다. 예를 들어 〈表-4〉에서 滿期收益率이 8%, 「쿠폰」利子率이 4%인 割引發行債券에 있어서 「듀어레이션」은 滿期까지의 期間이 50年까지는 체감율로 길어지다가 그 기간을 넘어서면 다시 짧아진다는 것을 알 수 있다.

이상을 要約하면 다음과 같다. 다른 모든 조건이 동일하다면, 債券의 「듀어레이션」은

1) 「쿠폰」利子率이 낮을수록 길어진다. 단, 永久債券의 「듀어레이션」은 「쿠폰」利子率과는 無關하게 항상 일정하다.

2) 주어진 滿期收益率의 水準이 낮을수록 길어진다.

3) 滿期까지의 期間이 길수록 額面發行債券 또는 割增發行債券의 「듀어레이션」은 체감율로 길어진다. 단, 割引發行債券의 「듀어레이션」은 어느 滿期까지의 期間동안에는 체감율로 길어지다가 그 期間을 넘어서면 다시 짧아진다.

Ⅳ. 「듀어레이션」과 債券價格의 變動

Lawrence Fisher 및 Michael H. Hopewell과 George G. Kaufman 등은 債券의 「듀어레이션」과

8) Lawrence Fisher and Roman L. Weil, "Coping with the Risk of Interest-Rate Fluctuations: Returns to Bondholders from Naive and Optimal Strategies," *Journal of Business* (October 1971), p. 418.

債券收益率의 變動에 따른 債券價格의 變動間에는 어떤 比例關係가 있다는 事實을 發見하였다.[9] 債券收益率의 變動에 따른 債券價格의 變動과 關聯하여 나타나는 債券「듀어레이션」의 이러한 關係는 債券의 價格을 債券收益率에 관해 微分함으로써 導出된다.[10]

資本還元을 위한 割引率로서 滿期收益率을 利用하여 表現한 債券의 價格은

$$P=\sum_{t=1}^{m}\frac{C_t}{(1+R)^t}+\frac{F}{(1+R)^m} \tag{2-4}$$

로 주어진다. 위의 식 (2—4)를 滿期收益率 R에 관하여 微分하면

$$dP=-\left[\sum_{t=1}^{m}\frac{tC_t}{(1+R)^{t+1}}+\frac{mF}{(1+R)^{m+1}}\right]dR$$

$$=-\left[\sum_{t=1}^{m}\frac{tC_t}{(1+R)^t}+\frac{mF}{(1+R)^m}\right]\frac{dR}{(1+R)} \tag{4-1}$$

가 된다. 식 (4—1)을 식 (2—4)로 다시 나누면

$$\frac{dP}{P}=-\left(\frac{\sum_{t=1}^{m}\frac{tC_t}{(1+R)^t}+\frac{mF}{(1+R)^m}}{\sum_{t=1}^{m}\frac{C_t}{(1+R)^t}+\frac{F}{(1+R)^m}}\right)\frac{dR}{(1+R)} \tag{4-2}$$

가 된다. 위의 식 (4—2)의 〔 〕안의 項은 식 (3—2)로 定義된 「듀어레이션」 D_1과 같으므로 위 식은

$$\frac{dP}{P}=-D_1\frac{dR}{(1+R)} \tag{4-3}$$

가 된다. 그리고 相對的으로 낮은 水準의 滿期收益率이 주어져 있다면, 식 (4—3)은 대략

$$\frac{dP}{P}\simeq -D_1 dR \tag{4-4}$$

가 된다.

만일 連續複割引을 假定할 경우에 債券의 價格은

$$P=\sum_{t=1}^{m}C_t\exp(-Rt)+F\exp(-Rm) \tag{4-5}$$

로 주어진다. 마찬가지로 식 (4—5)를 滿期收益率 R에 관하여 微分하면

$$dP=-\left[\sum_{t=1}^{m}tC_t\exp(-Rt)+mF\exp(-Rm)\right]dR \tag{4-6}$$

9) Lawrence Fisher, "An Algorithm for Finding Exact Rates of Return," *Journal of Business* (January 1966), pp. 111-118 and Michael H. Hopewell and George G. Kaufman, "Bond Price Volatility and Term to Maturity: A Generalized Respecification," *American Economic Review* (September 1973), pp. 749-753.

10) Michael, H. Hopewell and George G. Kaufman. *op. cit.*, p. 751.

가 되며, 식 (4−6)를 식 (4−5)로 다시 나누면

$$\frac{dP}{P} = -\left(\frac{\sum_{t=1}^{m} tC_t \exp(-Rt) + mF\exp(-Rm)}{\sum_{t=1}^{m} C_t \exp(-Rt) + F\exp(-Rm)}\right) dR \qquad (4\text{-}7)$$

이 된다. 위의 식 (4−7)에서 〔 〕안의 項은 식 (3−3)으로 定義된 「듀어레이션」 D_2와 같다. 따라서 식 (4−7)은

$$\frac{dP}{P} = -D_2 dR \qquad (4\text{-}8)$$

이 된다.

以上의 식 (4−4)과 식 (4−8)을 變化率로 表現하면 대략

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -D_1 \Delta R \qquad (4\text{-}9)$$

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -D_2 \Delta R \qquad (4\text{-}10)$$

가 될 것이다.

이러한 식 (4−4) (4−8) 또는 (4−9) (4−10)은 주어진 滿期收益率의 「베이시스 포인트」 變動에 대한 債券價格의 「퍼센티지」 變動이 그 債券의 「듀어레이션」에 비례한다는 것을 보여준다.[11] 그래서 주어진 滿期收益率의 「베이시스 포인트」 變動에 대한 債券價格의 「퍼센티지」 變動은 그 債券의 「듀어레이션」이 길수록 더 커진다는 것을 알 수 있다.

이제 이러한 식들을 이용하면, 앞서 「債券價格과 債券收益率의 關係」에서 言及한 債券價格의 變動에 관한 세가지 一般的인 法則은 물론 例外的인 事實도 다음과 같은 단 하나의 定理로 要約될 수 있다.

〈定理〉 주어진 債券收益率의 「베이시스 포인트」 變動에 대한 債券價格의 「퍼센티지」 變動은 그 債券의 「듀어레이션」과 比例하며 또한 그 債券의 「듀어레이션」이 길수록 보다 커진다.

이러한 定理가 모든 「쿠폰」債券의 경우에 例外없이 適用될 수 있다는 事實은 앞서 「債券價格과 債券收益率의 關係」에서 검토한 內容과 「듀어레이션의 一般的 性質」에서 검토한 內容을 서로 比較하면 明白하게 드러난다. 그러나 한가지 주목해야 할 점은 식 (4−9)와 식 (4−10)의 導出過程에서 알 수 있는 바와 같이 위의 定理는 주어진 滿期收益率의 變化가 아주 작은 경우에 한해서 正確하게 成立한다는 것이다.

V. 「듀어레이션」과 「이뮤나이제이션」

1. 利子率危險

未來利子率의 豫想하지 않은 變化(unexpected change)로 말미암아 모든 債券의 實現될 收益

11) 식에서 (−)부호는 債券價格과 債券收益率은 反對方向으로 움직인다는 것을 나타낸다.

(realized returns)은 그 債券의 買入時에 期待한 收益(expected returns)으로부터 이탈될 수 있다.[12] 이러한 可能性을 利子率危險(interest rate risk) 또는 基本的 危險(basis risk)이라고 한다.

「쿠폰」債券에 있어서 利子率危險은 두가지 위험 즉 價格危險(price risk)와 「쿠폰」再投資危險(coupon reinvestment risk)으로 구성된다. 價格危險은 未來利子率의 豫想하지 않은 變動으로 인하여 그 債券이 豫想한 價格과 다른 價格으로 賣渡될 可能性을 말하며, 「쿠폰」再投資危險은 受取한 「쿠폰」金額을 買入時의 豫想利子率과는 다른 利子率로 再投資하게 될 可能性을 말한다.

實現될 收益에 대한 이러한 危險들의 영향은 利子率의 變化와 더불어 反對方向으로 作用한다. 즉 未來의 實際利子率이 債券의 買入時에 豫想한 利子率보다 上昇하면, 保有期間末에 있어서 그 債券의 實際價格은 豫想價格보다 下落하게 되나 그 期間동안 受取한 「쿠폰」金額을 再投資함으로써 얻게 되는 實際收益은 豫想한 것보다 增加하게 된다. 반대로 未來의 實際利子率이 債券의 買入時에 豫想한 利子率보다 下落하면, 保有期間末에 있어 그 債券의 實際價格은 豫想價格보다 上昇하게 되나 그 期間동안 受取한 「쿠폰」金額을 再投資함으로써 얻게 되는 實際收益은 豫想한 것보다 減小하게 된다.

그래서 정해진 投資計劃期間을 가지고 있는 投資者가 利子率危險으로부터 債券價値를 保全하기 위해서는 이러한 價格危險과 「쿠폰」再投資危險을 서로 .相殺시켜야 할 것이다.

2. 「이뮤나이제이션」의 意義 및 原理

일반적으로 「이뮤나이제이션」(immunization)은 정해진 投資計劃期間동안에 최소한 期待된 收益率(expected rate of return)과 同一한 實現될 收益率(realized rate of return)을 얻는 것으로 定義된다. 이를 달리 말하면, 「이뮤나이제이션」은 정해진 保有期間末에 최소한 債券의 買入時에 기대한 總收益과 동일한 實現될 總收益을 얻는 것으로 定義될 수 있다.

債券이 滿期以前에 賣渡되거나 또는 「쿠폰」金額이 債券의 買入時에 期待한 收益率과 동일한 收益率로 再投資되지 않는다면, 그 債券의 實現될 收益率은 買入時에 期待한 收益率과는 다르게 될 수 있다. 따라서 「이뮤나이제이션」이 달성되기 위해서는 전술한 利子率危險의 두가지 要素가 서로 相殺되어야 할 것이다.

Lawrence Fisher와 Roman L. Weil에 의하면 그러한 「이뮤나이제이션」은 정해진 保有期間과 일치하는 「듀어레이션」을 갖는 債券(또는 債券포트폴리오)을 선택한다면 달성될 수 있다고 하였다.[13] 여기서는 債務不履行危險, 隨意償還危險 및 稅金 등이 없는 경우를 가정하여 이러한 「이뮤나이제이션」 原理를 구체적으로 살펴 보기로 한다.

어떤 投資者가 $t=0$ 時點에서 每年 一定한 「쿠폰」金額을 支給하고 滿期에 額面金額을 償還하

12) 未來利子率에 있어서 豫想된 變化는 債券買入時의 收益率의 期間構造에 내포되므로, 그것이 實際로 發生한다면 債券의 收益은 어떠한 영향도 받지 않게 된다.
13) Lawrence Fisher and Roman L. Weil, *op. cit.*, pp. 408-431.

는 「쿠폰」債券을 買入하여 滿期以前의 $t=s$ 時點에서 그 債券을 賣渡하고자 한다고 가정하자.

前述한 바와 같이 未來의 期間別收益率 (r_t)의 幾何平均으로 구해지는 期間 $[0,t]$ 동안의 保有期間收益率을 $h(0,t)$라 하고 連續複割引을 假定하면, $t=0$ 時點의 債券價格은

$$P=C\sum_{t=1}^{m}\exp[-h(0,t)t]+F\exp[-h(0,m)m] \tag{5-1}$$

P=債券의 價格

C=「쿠폰」金額

F=額面金額

m=滿期까지의 期間(年)

로 決定된다. 그리고 이 債券의 約束된 滿期收益率은

$$P=C\sum_{t=1}^{m}\exp[-Rt]+F\exp(-Rm] \tag{5-2}$$

를 충족시키는 割引率 R가 된다.

이제 그 投資者가 債券을 買入한 直後에 保有期間收益率의 期間構造에 예상하지 않은 단 한 번의 加法「쇼크」(additive shock)가 實際로 發生하여 그 收益率의 期間構造가

$$h^*(0,t)=h(0,t)+\lambda$$

되었다고 하자.[14] 이 경우에 그 投資者는 $t=s$ 時點에서 債券을 賣渡함으로써 實際로 얻게 되는 收益 $T(\lambda)$은

$$T(\lambda)=C\sum_{t=s+1}^{m}\exp[-h(s,t)(t-s)-\lambda(t-s)]$$
$$+F\exp[-h(s,m)(m-s)-\lambda(m-s)] \tag{5-3}$$

이 된다. 그리고 그 投資者가 保有期間동안 受取한 「쿠폰」金額을 再投資함으로써 $t=s$ 時點에서 實際로 얻게 되는 收益 $Q(\lambda)$은

$$Q(\lambda)=C\sum_{t=1}^{s}\exp[h(t,s)(s-t)+\lambda(s-t)] \tag{5-4}$$

이 된다. 따라서 $t=s$ 時點에 있어서 그 投資者가 얻게 되는 實現될 總收益은 식 (5—3)과 식 (5—4)의 合 즉

$$T(\lambda)+Q(\lambda)$$

이다.

만일 그 投資者가 債券의 買入時에 豫想한 保有期間收益率의 期間構造에 어떠한 變化도 발생하지 않는다면, $t=s$ 時點에서 그가 債券을 賣渡함으로써 얻게 되는 收益 $T(0)$은

$$T(0)=C\sum_{t=s+1}^{m}\exp[-h(s,t)(t-s)]+F\exp[-h(s,m)(m-s)] \tag{5-5}$$

가 되고, 受取한 「쿠폰」金額을 再投資함으로써 얻게 되는 收益 $Q(0)$은

14) 連續複割引을 가정할 경우, 모든 未來의 期間別收益率이 λ만큼 變化한다면 保有期間收益率 또한 λ만큼 變化한다. 이 점에 관해서는 G. O. Bierwag, *op. cit.*, pp. 727~731을 참조할 것

$$Q(0)=C\sum_{t=1}^{s}\exp[h(t,s)(s-t)] \tag{5-6}$$

가 된다. 따라서 그 投資者가 $t=s$ 時點에서 얻을 것으로 期待한 總收益은

$$T(0)+Q(0)$$

이다. 이 金額은 債券에의 投資額 P가 保有期間 $[0,s]$ 동안 連續複利로 運用된 價値인

$$P\exp[h(0,s)s]$$

와 같다.

前述한 바와 같이 모든 λ에 대해 $T(\lambda)+Q(\lambda)\geqq T(0)+Q(0)$가 成立한다면 完全한 「이뮤나이제이션」이 可能해 진다. 이것을 만족시키는 條件을 구하기 위해

$$G(\lambda)=\frac{T(\lambda)+Q(\lambda)}{T(0)+Q(0)} \tag{5-7}$$

로 두자. 앞서의 식 (5—3)과 식 (5—4)를 λ에 관하여 2次微分하면

$$T''(\lambda)=C\sum_{t=s+1}^{m}(t-s)^2\exp[-h(s,t)(t-s)-\lambda(t-s)]$$
$$+F(m-s)^2\exp[-h(s,m)(m-s)-\lambda(m-s)]$$

$$Q''(\lambda)=C\sum_{t=1}^{s}(s-t)^2\exp[h(t,s)(s-t)+\lambda(s-t)]$$

가 되므로 모든 λ에 대해 $T''(\lambda)>0$, $Q''(\lambda)>0$이다. 그래서 식 (5—7)의 $G(\lambda)$를 λ에 관하여 2次微分한 $G''(\lambda)$ 또한 모든 λ에 대해 0보다 크다는 것을 알 수 있다. 그러므로 $G(\lambda)$를 λ에 관하여 1次微分한 $G'(\lambda)$에 있어서 $G'(0)=0$가 되는 「쿠폰」債券을 선택한다면, 모든 λ에 대해 $G(\lambda)\geq 1$이 된다는 결론이 나오며, 따라서 完全한 「이뮤나이제이션」이 實現될 것이다.[15)]

먼저 定義에 의하면 $h(t,s)=h(s,t)$이므로, 식 (5—4)는

$$Q(\lambda)=C\sum_{t=1}^{s}\exp[-h(s,t)(t-s)-\lambda(t-s)]$$

와 같다. 그래서

$$T(\lambda)+Q(\lambda)=C\sum_{t=1}^{m}\exp[-h(s,t)(t-s)-\lambda(t-s)]$$
$$+F\exp[-h(s,m)(m-s)-\lambda(m-s)]$$

로 간단히 表現된다. 이제 $G'(\lambda)$를 구하면

$$G'(\lambda)=\frac{C\sum_{t=1}^{m}(s-t)\exp[-h(s,t)(t-s)-\lambda(t-s)]+F(s-m)\exp[-h(s,m)(m-s)-\lambda(m-s)]}{P\exp[h(0,s)s]} \tag{5-8}$$

가 된다. 식 (5—8)에서 $\lambda=0$로 두면

15) 이 점에 관한 구체적인 증명은 G. O. Bierwag, "Measures of Duration," *Economic Inquiry* (October 1978), pp. 497-507을 참조할 것.

$$G'(0)=\frac{C\sum_{t=1}^{m}(s-t)\exp[-h(s,t)(t-s)]+F(s-m)\exp[-h(s,m)(m-s)]}{P\exp[h(0,s)s]}$$

$$=\frac{C}{P}\sum_{t=1}^{m}(s-t)\exp[-h(s,t)(t-s)-h(0,s)s]$$

$$+\frac{F}{P}(s-m)\exp[-h(s,m)(m-s)-h(0,s)s] \qquad (5\text{-}9)$$

이다. 한편 均衡狀態下에서

$$h(0,s)s+h(s,t)(t-s)=h(0,t)t,\quad s<t$$

이므로,[16] 식 (5—9)는

$$G'(0)=\frac{C}{P}\sum_{t=1}^{m}(s-t)\exp[-h(0,t)t]+\frac{F}{P}(s-m)\exp[-h(0,m)m] \qquad (5\text{-}10)$$

이 된다. 여기서

$$w(t)=C\exp[-h(0,t)t]/P, \qquad 1\leq t\leq m$$

$$w(m)=F\exp[-h(0,mm]/P$$

로 두면, 식 (5—10)은

$$G'(0)=\sum_{t=1}^{m}(s-t)w(t)+(s-m)w(m)$$

$$=s\Big[\sum_{t=1}^{m}w(t)+w(m)\Big]-\Big[\sum_{t=1}^{m}tw(t)+mw(m)\Big]$$

가 된다. 그리고 식 (5—1)에 의해

$$\sum_{t=1}^{m}w(t)+w(m)=1$$

이므로,

$$G'(0)=s-\Big[\sum_{t=1}^{m}tw(t)+mw(m)\Big]$$

이다.

따라서 完全한 「이뮤나이제이션」을 위한 조건은 $G'(0)=0$이 되는

$$s=\sum_{t=1}^{m}tw(t)+mw(m) \qquad (5\text{-}11)$$

로 주어진다. 위의 식 (5—11)에서 우변은 일종의 「듀어레이션」으로 간주할 수 있다. 그러므로 이 「듀어레이션」을 D_s라고 하면,

16) G.O. Bierwag, "Immunization, Duration, and the Term Structure of Interest Rates," *op. cit.*, p. 727.

$$D_3=\frac{\sum_{t=1}^{m} tC\exp[-h(0,t)t]+mF\exp[-h(0,m)m]}{\sum_{t=1}^{m} C\exp[-h(0,t)t]+F\exp[-h(0,m)m]} \qquad (5\text{-}12)$$

그 投資者는 정해진 保有期間과 일치하는 D_3의 「듀어레이션」을 갖는 「쿠폰」債券을 선택함으로써 최소한 期待한 收益率과 동일한 實現될 收益率을 얻게 되고, 따라서 그의 投資資産을 이자율 위험으로부터 보호할 수 있게 된다.

만일 連續複割引 대신에 期間別 複割引을 假定하면 上記의 D_3는 대략적으로

$$D_4=\frac{\sum_{n=1}^{m}\frac{nC}{\prod_{t=1}^{n}(1+r_t)}+\frac{mF}{\prod_{t=1}^{m}(1+r_t)}}{\sum_{n=1}^{m}\frac{C}{\prod_{t=1}^{n}(1+r_t)}+\frac{F}{\prod_{t=1}^{m}(1+r_t)}} \qquad (5\text{—}13)$$

가 된다.[17] Hicks와 Weil은 그들의 「이뮤나이제이션」의 定理를 전개함에 있어 上記 D_4의 「듀어레이션」 척도를 제의하고 있다.[18]

그리고 收益率의 期間構造가 水平이라고 假定하고 또한 債券을 買入한 直後 그러한 期間構造에 단 한번의 加法「쇼크」가 發生하였다고 假定한다면, 同一한 期間에 대해 保有期間收益率과 滿期收益率은 같게 되고 또한 未來 期間別收益率의 이러한 變化는 동일한 크기의 滿期收益率의 變化를 가져다 주므로 「이뮤나이제이션」은 前述한 滿期收益率에 의해 表現된 Macaulay의 「듀어레이션」D_2을 갖는 債券을 선택함으로써 달성될 수 있다.

한편, 이러한 「이뮤나이제이션」 戰略에 관한 經驗的 硏究에 의하면 정해진 保有期間과 일치하는 「듀어레이션」을 갖는 채권을 선택하는 전략이 정해진 保有期間과 일치하는 滿期를 갖는 債券을 선택하는 戰略보다 約束된 收益率에 가까운 실현될 收益率을 가져다 준다고 한다.[19] 그렇다고 해서 利子率危險은 完全히 제거되지는 않는다. 그것은 利子率의 期間構造에 관한 가정된 確率過程(stochastic process)이 확실하게 알려져 있지 않는 實際의 確率過程과 다르기 때문이다.[20] 따라서 保有期間과 일치하는 「듀어레이션」을 갖는 債券을 選擇하더라도 「이뮤나이제이션」危險은 발생하게 된다.

Ⅵ. 要約 및 結論

以上에서 本稿는 먼저 債券價格, 債券收益率 및 「듀어레이션」 등의 基本的 槪念에 대해 定義

17) G.O. Bierwag and George G. Kaufman, "Coping with the Risk of Interest-Rate Fluctuations: A Note," *Journal of Business* (July 1977), p.370.
18) Lawrence Fisher and Roman L. Weil, *op. cit.*, p.430.
19) Lawrence. Fisher and Roman L.. Weil, *op. cit.*, pp.408-431, and G.O. Bierwag, G.G. Kaufman, R. Schweitzer and A. Toevs, "The Art of Risk Management in Bond Portfolios," *Journal of Portfolio Management* (Spring 1981) pp.27-36.
20) G.O. Bierwag, G.G. Kaufman and A. Toevs, "Bond Portfolio Immunization and Stochastic Process Risk," *Journal of Bank Research* (Winter 1983), p.286.

하고, 나아가 債券分析 내지는 管理와 관련하여 提議된 「듀어레이션」의 두가지 應用方法에 대한 一般的인 原理를 살펴 보았다. 여기서는 이상의 內容을 다시 한번 간략하게 要約하면서 「듀어레이션」을 債券分析 내지는 管理에 應用함에 있어서 나타나는 問題點을 指摘하기로 한다.

債券의 價格은 期待되는 未來現金흐름의 資本還元된 價値로 定義되며, 이때 資本還元을 위한 割引率은 豫想되는 未來의 期間別收益率에 의해 결정된다. 이러한 債券價格이 주어져 있다면 滿期收益率은 그 價格과 未來現金흐름의 現在價値를 일치시키는 單一의 割引率로 計算된다.

「쿠폰」債券에 있어서 滿期收益率은 未來의 期間別收益率이 每期 동일한 경우에 즉 收益率의 期間構造가 水平의 形態를 취할 경우에만 同一한 期間의 保有期間收益率과 같게 되고 그래서 未來의 期間別收益率의 幾何平均과 같게 된다. 그러나 일반적인 경우 즉 收益率의 期間構造가 水平의 形態를 취하지 않을 경우에는 滿期收益率은 同一한 期間에 대해서 保有期間收益率과 다르게 고 그래서 未來의 期間別收益率의 幾何平均으로 주어지지 않는다. 따라서 連續複割引을 假定하더라도 未來의 期間別收益率의 一定한 變化는 반드시 동일한 크기의 滿期收益率의 變化와 관련되지 않는다.

식 (3—2) 및 식 (3—3)으로 定義된 「듀어레이션」尺度 (흔히 이를 Macaulay의 「듀어레이션」이라고 한다)는 未來現金흐름을 滿期收益率에 의해 割引하고 있는데 반해, 식 (5—12) 및 식(5—13)으로 定義된 「듀어레이션」尺度(흔히 이를 Fisher-Weil의 「듀어레이션」이라고 한다)는 未來現金흐름을 保有期間收益率에 의해 달리 말해서 未來의 期間別收益率에 의해 割引하고 있다. 그래서 이러한 두가지 「듀어레이션」尺度는 收益率曲線의 形態에 따라 서로 다른 값을 가져다 줄 수 있다. 단지 收益率曲線이 水平의 形態를 취할 경우에만 동일한 값을 가져다 준다.

이러한 점에서 식 (4—3) 및 (4—8)은 단지 滿期收益率의 變動에 대한 債券價格變動의 정확한 척도를 제공할 뿐, 保有期間收益率의 變動 또는 未來의 期間別收益率의 變化에 대한 債券價格의 比例的 變動의 정확한 척도를 제공하지는 않는다. 따라서 保有期間收益率의 變動 또는 未來의 期間別收益率의 變化와 債券價格의 變動을 관련지우기 위해서는 또 다른 「듀어레이션」尺度를 필요로 한다. 그러한 「듀어레이션」尺度는 식 (4—3) 및 식 (4—8)을 도출하는 것과 유사한 방법에 의해 도출될 수 있다.

이와 마찬가지로 「이뮤나이제이션」을 위해 사용되는 「듀어레이션」尺度도 收益率 期間構造의 形態 및 그러한 構造에 있어서의 「쇼크」(shock)의 性質과 관련된다. 前述한 바와 같이 債券을 買入한 直後 收益率의 期間構造에 단 한번의 加法「쇼크」가 발생한다고 가정할 경우에 Fisher-Weil의 「듀어레이션」척도는 「이뮤나이제이션」을 위한 最適의 尺度가 된다. 그러나 加法「쇼크」이외의 다른 「쇼크」가 발생할 경우 —예를 들어 乘法「쇼크」[$h^*(0,t)=\lambda h(0,t)$]가 발생할 경우 또는 加法「쇼크」와 乘法「쇼크」가 동시에 발생할 경우—에는 「이뮤나이제이션」을 달성하기 위해 또 다른 「듀어레이션」척도가 필요하다.[21]

21) 이러한 「듀어레이션」 尺度에 관해서는 G. O. Bierwag, "Immunization, Duration, and the Term Structure of Interest Rates," *op. cit.*, pp. 725-742를 참조할 것.