

# 하방위험을 이용한 위험자산의 최적배분

(Optimal Portfolio Selection in a Downside Risk framework)

형 남원 (Hyung, Namwon)

서울시립대학교 경제학부  
서울시 동대문구 전농동 90번지  
전화: 02-2210-5602  
팩스: 02-2246-0570  
e-mail: nhyung@uos.ac.kr

한 규숙 (Han, Kyu Sook)

서울시립대학교 경제학부  
서울시 동대문구 전농동 90번지  
e-mail: schiz33@uos.ac.kr

2007년 5월

# 하방위험을 이용한 위험자산의 최적배분

(Optimal Portfolio Selection in a Downside Risk framework)

## 요 약

손실기피(limited down side risk) 선호를 가진 투자자의 경우 통상적으로 사용하는 위험도의 척도인 분산 혹은 표준편차 대신에 하방 위험성에 더 관심을 가지게 되는데, 이러한 경우 평균-VaR 모형이 평균-분산 모형보다 더 적합한 모형일 수 있다. 이 논문에서는 두 모형을 이용하여 최적 자산배분 문제를 실증분석하고 그 결과의 차이를 비교하였다. 수익률의 분포에 정규분포 가정이 아닌 두터운 꼬리(fat tail) 분포 가정을 도입하여 극단적인 위험을 고려한 최적자산배분 문제를 분석을 하였다. 각 이론이나 가정들의 강건성(robustness)을 살펴보기 위하여 역사적 분포를 이용한 분석을 비교 기준으로 하였다.

경험적 혹은 역사적 분포를 이용한 분석을 통해서, 극단적인 위험을 고려하는 손실기피적인 선호체계에서의 최적화 행위는 정규분포의 가정이나 평균-분산 모형이 적절하지 않은 것으로 확인되었다. 일상적인 수준을 능가하는 극단적인 손실 위험성을 고려하기에 적합한 모형은 수익률의 두터운 꼬리를 반영하는 분포 가정에 기초한 평균-VaR 모형인 것으로 나타났다.

주요단어: 하방위험, 평균-분산 모형, 평균-VaR 모형

# 1. 서론

금융시장의 개방과 해외자본의 유입의 증가에 따라 금리, 환율, 주가 및 상품가격의 변동성이 증대되었으며 이에 따라 시장위험에의 노출이 증대되었다. 이에 따라 금융기관의 위험에 대한 체계적이고 과학적인 관리가 중요한 분야로 부각되었다. 금융기관들이 직면하는 위험의 정도를 통계학적으로 측정하는 방법은 다양하게 제시되어 있다. 가장 표준적으로 사용되어지는 표준편차 이외에도 1998년 국제결제은행에 의해 도입된 신자기자본규제에 의해 그 사용이 널리 확산된 VaR (Value at Risk), 일정한 임계치를 넘어서는 변동으로 인한 기대손실(Expected Shortfall), 그 외에도 First Lower Partial Moment, 반분산(Semi-variance) 등과 같은 다양한 수단이 사용되어진다.

이러한 다양한 방법으로 위험을 측정하려고 하는 것은 금융기관의 위험관리자의 입장에서 관심을 가지는 위험의 종류가 다양하기 때문이다. 표준편차는 금융기관의 일상적인 활동에서 발생할 수 있는 손실의 위험을 측정하는데 유리한 척도인 반면, 1997년도 금융위기나 거래업체의 파산과 같은 극한적인 사건의 발생으로 금융기관의 존립 자체가 위태로워질 수 있는 위험의 측정에는 한계가 있다.

VaR는 미래에 발생할 수 있는 위험을 시장가격의 측면에서 특정 신뢰구간 내에서 발생하는 경우 입을 수 있는 최대 손실규모로 수량화 한 것이다. 개념적 단순성과 이용의 편리성으로 인해 그 이용의 범위가 확장되고 있다. 그러나 많이 사용되어지는 VaR 모형에서는 (예를 들어 J.P. Morgan에 의해 개발된 Riskmetrics 프로그램) 정규분포 가정 하에서 단순한 분산공분산방법에 의해 VaR를 계산한다. 이 방법은 분포의 꼬리(tail) 부분의 변동성을 설명하기에는 한계가 있는 개념이다. 준모수적(semi parametric) 방법에 의해서 꼬리부분의 움직임만을 따로 분석하는 것이 더 우월한 방법임이 최근의 여러 연구에서 밝혀졌다.

준모수적 방법의 이론적 근거를 제시하는 극치이론(Extreme value theory)의 이론적 발전은 최근 위험관리의 분야에 다양한 영향을 미쳤다. 하방위험(downside risk)이나 극단적인 위험에 관심을 가지는 평균-VaR 최적화 모형이나, 포트폴리오의 분산효과를 분석할 때 통상적인 위험보다는 준모수적 방법에 의해 측정된 VaR로 극단적인 위험으로 분석하는 등 여러 분야로 그 적용의 범위를 넓혀가고 있다.

기존의 연구가 포트폴리오의 최적배분의 전략을 연구할 때 주로 표준

편차로 측정되는 위험과 기대수익률간의 관계에만 초점을 맞춘 것에 비해, 이 논문은 이를 좀 더 현실성 있는 위험의 척도인 하방위험(downside risk)으로 확장한 경우의 자산의 최적배분의 문제를 다루고자 한다. 이를 통한 결과를 기존 연구방법에 따르는 경우의 결과와 비교분석하는 것이 이 논문의 목적이다.

이와 관련된 과거의 논문을 살펴보면 Roy (1952)와 Arzac and Bawa (1977)가 하방 위험을 고려하는 경우의 기대수익 최적화란 문제를 제시한 이후, Jansen, Koedijk and de Vries (2000), Gourieroux, Laurent, Scaillet (2000)에서 이의 후속 연구가 이루어졌는데, 전자는 극치이론을 고려한 VaR를 이용한 선택 문제의 실증적 분석을, 후자는 VaR 선택 문제의 불록성, 해의 존재성 등 이론적인 측면에 초점을 맞추었다. 특히 전자의 경우 확률  $1/2n$  과 같은 극단적인 위험<sup>1)</sup>에 초점을 맞추어 분석하였다. 비슷한 연구로 Campbell, Huisman and Koedijk (2001)은 1% 혹은 5% 정도의 통상적인 수준의 위험에 대한 분석을 하고 파레토 형태의 분포가 아닌 다른 형태의 분포를 이용하여 분석하고 있다. 국내 연구로 김진호 (2002)는 VaR를 역사적 분포를 이용하여 추정하는 다음, Cambell, Huisman and Koedijk (2001)의 평균-분산의 결과와 비교분석하였다.

본 논문에서는 Jansen, Koedijk and de Vries (2000)의 방법에 기초하여 평균-VaR 모형을 추정하고, 이를 평균-분산 모형과 비교하였다<sup>2)</sup>. 그리고 이들을 고려 대상의 위험의 수준에 따른 비교, 즉 5%, 1%와 같은 통상적인 수준의 위험과 0.5% 0.25%와 같은 극단적인 위험간의 비교, 그리고 수익률의 분포에 따른 차이 비교에 초점을 맞추었다. 표준편차나 역사적 분포를 이용하는 경우의 방법론은 기존의 논문에서 사용한 연구 방법과 비슷하지만, 파레토분포로 근사하는 극치이론의 분석 방법은 각 포트폴리오 별로 각각의 꼬리분포에 대해 추정하는 방식으로 Jansen, Koedijk and de Vries (2000)의 분석에서 나타난 방법론의 문제점을 개선하였다. 그리고 추가적으로 역사적 분포를 이용한 분석을 통해 각 모형에서 사용하는 분포 가정에 대한 적절성 여부까지 아울러 고려하였다. 제 2장에서 평균-VaR 모형에 대해 간략하게 설명하고, VaR의 추정에 극치이론을 사용하는 방법을 소

- 
- 1)  $n$ 은 표본의 크기를 의미한다. 따라서 확률  $1/2n$ 은 관찰된 표본기간보다 2배의 기간동안 한번정도 관찰될 수 있는 정도의 확률로서, 만약 분석자료의 표본기간이 5년이면, 10년에 한번 꼴로 발생할 가능성이 있는 극단적인 사건을 의미한다. Jansen, Koedijk and de Vries (2000)은 각각 확률수준 0.25%, 0.0625% 등과 같은 극단적인 경우를 분석하는데 초점을 맞추었다.
  - 2) Artzner, Delbean, Eber and Heath (1999)는 위험측정지표로서 VaR는 subadditivity 및 convexity의 특성을 충족시키지 못하므로 최적화의 대상으로 부적합하다고 지적하였다. 그러나 최근 연구 결과에 따르면, 대부분의 두터운 꼬리를 가진 분포의 경우 꼬리부분에서 Danielsson, Jorgensen, Samorodnitsky, Sarma and de Vries (2005)은 subaditivity가 만족함을 보였고 Hyung and de Vries (2007)는 convexity가 만족함을 보였다.

개한다. 제 3장 및 4장에서는 실증분석과 그 결론을 각각 제시한다.

## 2. 안전우선이론 (safety-first theory)과 극치이론

### 2.1. 안전우선이론 (safety-first theory)

전통적인 재무이론에서 최적위험자산배분 전략은 주로 평균-분산(mean-variance) 모형에서 이루어져왔다. 기대수익률과 위험 사이의 trade-off 관계는 효용함수의 오목한 성질에서 유도된다. 효용함수의 제 1차 접근(first order approximation)에서 평균-분산 간의 최적행위가 유도되지만, 투자자들이 잠재적인 수익 가능성보다는 손실 가능성에 관심을 가지는 손실 기피(limited down side risk) 선호에서는 이러한 통상적인 평균-분산 모형으로 설명하기 곤란하다. 예를 들면 관리감독자(regulator)는 손실가능성에 대한 지표로서 VaR과 같은 수치를 요구하고, 자본의 적정성 여부는 이런 수치에 근거하여 판단을 내리게 된다. 위험을 관리하는 입장에서는 VaR로부터 야기되는 하한선보다 보수적으로 운용하려는 경향이 강하다. 또한 외국의 연금기금의 운용에서 투자 포트폴리오의 위험이 낮은 수준으로 유지되도록 법에 의해서 강제하기도 한다.

최근의 앞에서 언급한 몇몇 연구에서 위험의 척도를 표준편차가 아닌 VaR를 이용한 평균-VaR 모형에서의 최적화문제에 관심을 가지기 시작하였다. 전통적인 평균-분산 모형에서 사용하는 위험의 척도인 표준편차의 개념과 VaR은 여러 가지 측면에서 차이를 가지는데, 먼저 VaR은 대부분의 금융시계열이 보이는 두꺼운 꼬리분포(fat-tailed distribution)의 특성을 반영하는데 표준편차보다 유리하다. 그리고 VaR은 표준편차와는 달리 분포의 왼쪽부분, 즉 하방위험(downside risk)에만 초점을 맞추는 경우도 있어 분포의 비대칭성을 고려하는데 표준편차보다 유리하다.

적정위험관리를 위해 VaR을 활용한 최적자산 배분은 전통적인 평균-분산 모형과 차이를 보인다. 기존의 전통적인 이론에서는 효율적인 투자곡선 및 효용함수의 도출은 위험을 분산 혹은 표준편차로 측정함을 전제로 하고 있다. 이는 평균-분산 평면상의 분석을 의미한다. 위험을 표준편차 대신 VaR로 사용하는 경우 평균-VaR 평면상의 분석이 필요하다. 하방위험 중심의 위험 측정은 사람들의 위험에 대한 관심이 기본적으로 손실(downside)에 있다는 논거에 따라 꾸준히 관심이 가진 주제였다. Roy (1952)에 의하여 제

시되고 Arzac and Bawa (1977)이 발전시킨 안전우선 선호체계(safety-first criterion)은 특히 실패의 가능성(probability of failure)에 초점을 맞춘 것으로 Roy (1952)의 방법론을 이론적으로 발전시켰다. 이 이론에 대한 실증적 분석이 최근에 이루어 졌는데 Jansen, Koedijk and de Vries (2000) 그리고 Cambell, Huisman and Koedijk (2001) 등이 있다.

Arzac and Bawa (1977)가 발전시킨 VaR 제약 하에서의 자산선택 최적화 문제는 아래와 같다.

$$\max_{a, a_0} (\pi, \mu) \text{ subject to } a'P_t + a_0 = W_t \quad (1)$$

여기서  $\pi = 1$ , if  $p = \Pr(a'P_{t+1} + a_0R_f \leq s) \leq \delta$ , 그 외의 경우는  $\pi = 1 - p$  로 각각 주어진다. 그리고  $\mu = Ea'P_{t+1} + a_0R_f$ ,  $P_t$  = 자산의 초기시장가격,  $W_t$  = 투자자의 초기 부,  $a_0$  = 빌리거나 빌려준 금액,  $R_f$  = 무위험 조수익률,  $a'$  = 위험자산에 투자한 포트폴리오 금액으로 각각 정의한다.

위의 극대화 문제는 다음과 같이 정리된다.

$$\max_a \frac{\overline{R_p} - R_f}{R_f - q_\delta(R_p)} \quad (2)$$

여기서  $R_p = a'P_{t+1}/a'P_t$  이고  $\overline{R_p} = E(R_p)$ ,  $q_\delta(R_p)$  은  $\delta\%$  가 주어졌을 때 해당되는 VaR 수준이다. 이상의 문제에서 안전우선 선호체계(safety-first criterion)을 가진 투자자는 주어진  $\delta$  에서 위의 비율을 최대화하려고 한다. 여기서 평균-분산 모형에서와 마찬가지로 분리이론(two-fund separation)이 적용되어 두 번째 단계에서 무위험자산의 선택비율  $a_0$  은 다음의 식을 통해 구할 수 있다.

$$W_t - a_0 = \frac{s - W_t R_f}{q_\delta(R_p) - R_f}$$

이 부분에 대한 자세한 유도과정 및 이론적 설명은 Arzac and Bawa (1977) 혹은 Jansen, Koedijk and de Vries (2000)을 참고하라.

앞에서 설명한 바와 같이 평균-VaR 모형은 기대수익률과 위험의 척

도인 VaR 간의 trade-off 관계를 이용하여 최적화된 위험자산 배분을 찾아낸다. 여기서 VaR의 추정 방법에 따라 이 모형의 실증 분석 결과는 여러 가지 다른 결론을 유도할 수 있다.

## 2.2. 극치이론을 이용한 VaR의 추정

먼저 수익률의 정규분포를 가정한 경우 VaR는 표준편차에 일정배수를 곱한 값과 같아지므로, 전통적 평균-분산 모형과 일치하게 된다. 이의 이론적인 유도 결과는 이미 Arzac and Bawa (1977)의 논문에 밝혀져 있다. 그러나 이와 같은 모수적 방법은 이미 금융자료의 수익률의 분포가 두터운 꼬리(fat-tailed) 분포를 가지고 있다는 경험적 결과에 의해 그 타당성이 의문시 된다. 하지만 사용의 편리성으로 인해 실무적으로는 오히려 더 널리 사용되어지고 있다.

수익률 자료의 분포이론의 가정이 비현실적인 경우가 있을 수 있다. 이러한 오류의 가능성을 회피하는 수단으로 역사적 분포를 이용한 VaR 추정도 가능하다. 이미 잘 알려졌듯이 이 방법은 다른 비모수적 방법들과 마찬가지로 분포의 중심에 해당하는 영역에서의 추정결과는 우수하지만, 관측 자료가 희소한 꼬리부분의 추정에는 그 한계를 내포하고 있다. 특히 관측치의 범위를 벗어나는 가능성 (즉  $1/n$  보다 작은 확률)에 대한 분석은 원천적으로 불가능한 단점이 있다.

이 논문에서 주안점을 두는 방법은 최근에 발달한 분포이론 중 특히 극치이론을 이용한다. 이는 꼬리가 두터운 분포의 특성을 가지는 금융자산의 수익률 분포를 근사시키는데 상당히 유리한 분석 방법이다. regular variation의 특성을 가지는 두터운 누적확률분포  $F(x)$ 는  $x$ 가 커짐에 따라 다음과 같이 파레토 분포로 점근하게 된다.

$$F(-x) = Ax^{-a} \tag{3}$$

이러한 특성을 가지는 분포는 지수  $a$  보다 작은 적률 (moment)에 대해서만 그 존재가 보장되는 분포로 모든 적률이 존재하는 정규분포와 뚜렷한 대비를 이룬다. 꼬리부분의 특성만을 이용하는 준모수적(semi-parametric) 방법에 의해 우리는 다음과 같은 꼬리지수(tail index)를 추정할 수 있다. 먼저 표본  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 에서  $m$  번째 크기의 관측치를  $X_{(m)}$ 로 정의한다. 즉  $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(m)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ 에 대해 Hill (1975)의 추정방법은 다음

과 같다.

$$1/\hat{\alpha} = -\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(X_{(n+1-i)}/X_{(n-m)}) \quad (4)$$

이를 이용하여 주어진 확률  $\delta$  에 대한 VaR 를 추정할 수 있다.

$$\widehat{VaR} = X_{(m)} \left( \frac{-m}{\delta n} \right)^{1/\hat{\alpha}} \quad (5)$$

Jansen, Koedijk and de Vries (2000)은 이 방법에 의해 VaR를 추정하고 최적자산의 선택을 실증 분석하였다. 그러나 극치이론을 이용한 식 (3)은  $x$ 의 값이 극한으로 수렴하는 경우에 성립하는 극한이론이므로 실증분석에 직접적으로 적용시키기에는 어려운 점이 있다. 이 이론을 포트폴리오의 선택에 직접 적용하기 위해서는 약간의 추가적인 설명이 필요하다. Jansen, Koedijk and de Vries (2000)가 사용한 방법은 아래와 같다. 서로 독립인 두 자산의 수익률이 다음과 같은 특성을 가지고 있을 때,

$$\Pr \{X_1 \leq s\} = A_1 s^{-\alpha_1} \text{ as } s \rightarrow \infty$$

$$\Pr \{X_2 \leq t\} = A_2 t^{-\alpha_2} \text{ as } t \rightarrow \infty$$

그리고  $\alpha_1 \leq \alpha_2$  라면, 임의의  $\omega \in [0, 1]$  에 대해서

$$\Pr \{\omega X_1 + (1 - \omega) X_2 \leq s\} = \omega^{\alpha_1} A_1 s^{-\alpha_1} \text{ if } \omega \neq 0 \quad (6)$$

$$\Pr \{\omega X_1 + (1 - \omega) X_2 \leq s\} = (1 - \omega)^{\alpha_2} A_2 s^{-\alpha_2} \text{ if } \omega = 0 \quad (7)$$

성립한다. 위의 식 (6)과 (7)은 포트폴리오를 구성하는 자산 중, 가장 위험한 자산의 특성이 전체 포트폴리오의 분포의 꼬리 부분의 특성을 결정한다는 Geluk and de Haan (1987)의 논의에 의해 유도된다. 이러한 이론적 근거를 바탕으로 Jansen, Koedijk and de Vries (2000)은 실증분석에서  $w = 0$ 인 경우를 제외한 나머지 모든 포트폴리오의 추정된 꼬리지수를 자산 1의 꼬리지수  $\alpha_1$ 과 일치시키고,  $w = 0$ 인 경우, 즉 자산 2만 포함된 포트폴리

오의 경우에만 꼬리지수  $\alpha_2$ 를 각각 사용하여 분석을 하였다. 이론적인 일관성에도 불구하고 이들의 분석 결과는  $w = 0$  부근에서 평균-VaR 분석이 불연속성을 보이는 단점을 내포한다. 이 이론은  $s \rightarrow \infty$  와 같은 극한에서만 성립하는 것으로 유한개의 자료를 이용하는 실제의 추정은 극한이 아닌 유한한 크기의  $s$  를 선택하므로 이런 불연속성의 문제가 나타나지 않는다. 유한한 크기의  $s$  하에서, Hyung and de Vries (2007)은 꼬리지수의 특성을 파레토근사방법의 2차 점근항까지 고려하는 경우, 일정한 조건 하에서는 식 (6)에서  $X_2$  의 분포의 특성이 포트폴리오의 꼬리부분의 특성에 2차 점근항을 통해 여전히 영향력이 있을 수 있음을 보였다.

이 논문에서 Jansen, Koedijk and de Vries (2000) 방법의 불연속성의 문제를 해결하기 위한 수단으로 다음의 방법을 따른다. 먼저 두 자산간의 투자비율  $w$ 를 설정하고, 이를 통해 이 포트폴리오의 수익률을,  $\omega X_1 + (1 - \omega) X_2$ , 각 자산의 수익률로부터 산출한다. 모든 가능한 투자비율에 대한 각 포트폴리오의 VaR를 계산한다. 이 방법의 장점은 자산 간의 복잡한 형태의 비독립성에 대한 고려가 따로 필요치 않다는 것이다. 실증분석에서 밝히지만 이 논문에서는 역사적 분포를 이용한 분석을 주요 비교 기준으로 사용하고 있다. 따라서 비교분석의 일관성을 위해 고려가능한 모든 조합에 대한 포트폴리오를 구성하여, 각 포트폴리오의 수익률로부터 계산한 VaR를 이용하여 최적화된 투자비율을 찾아낸다. 이 방법은 조합 가능한 모든 투자에 대해 계산을 해야 하고, 그 결과도 근사치로만 주어진다라는 단점이 있다. 그 외에도 극치이론을 이용하는 VaR의 계산에서 아직 결합분포를 이용한 다변량 분석방법에 대한 이론적인 발달이 미비하다. 최근 Hartman, Straetmans and de Vries (2004) 등에서 결합분포를 고려한 극단적인 충격의 전이효과 등에 대한 분석이 이루어지고 있지만, 이 분석 방법은 일반적인 포트폴리오에 적용하여 분석할 수 없다는 한계를 여전히 내포한다.

### 3. 실증분석

분석의 대상은 산업별 분류에 따른 자산군 중, 특히 비금속광물과 운수장비 부문을 그 분석의 대상으로 선택하였다<sup>3)</sup>. 기간은 1983년 1월 4일부

3) 이론적으로는 어떠한 산업군들을 선택하여도 이 논문의 논의가 동일하게 적용된다. 그러나 자산간 수익률 및 위험도의 차이가 너무 큰 경우에는 포트폴리오 선택의 결과가 종종 구석해 (corner solution)로 유도되는 경우가 많다. 이러한 경우 서로 다른 방법들 간의 차별성이 부각 되지 않으므로 본 논문은 위의 특정한 산업군을 선택하였다.

터 2006년 11월 13일까지로 하였으며, 총 6626개의 일별 자료를 관측 대상으로 하였다. 수익률은  $r_t = 100 \times \{ \ln(P_t) - \ln(P_{t-1}) \}$ 로 정의된다. 여기서  $P_t$ 는 가격지수를 의미한다. <그림 1>은 분석 기간 중 비금속광물과 운수장비 부문의 수익률 추이를 보여준다. 1997년 말을 전후하여 변동성이 뚜렷한 차이를 보이고 있다. 극단적인 위험의 고려가 포트폴리오 최적화 구성에 미치는 영향을 분석하고자 이러한 구조변동의 가능성은 일단 무시하고 충분한 길이의 자료 확보에 먼저 주안점을 둔다<sup>4)</sup>.

실증분석에서 우리는 가상적인 포트폴리오를 구성하여 평균-위험 최적화 전략을 분석한다. 여기서 위험은 분산 (더 정확하게는 표준편차) 혹은 VaR를 각각 의미하고, 이들의 추정 방법은 수익률 분포의 가정에 따라 달라진다. 먼저, 정규분포 혹은 두터운 분포 가정 하에서 VaR 값을 추정하고, 이를 역사적 (혹은 경험적) 분포로부터 구한 VaR 값과 비교한다. 이후에 평균-VaR 모형에서 최적화 문제를 다룬 다음, 이를 기존의 접근방법인 평균-분산 모형의 결과와 얼마나 차이가 나는 지를 비교한다.

이 논문에서 가상적인 포트폴리오를 다음의 방법으로 구성한다. 운수장비 부문 및 비금속광물 부문의 자산군들로 구성되는 21가지의 각각의 포트폴리오에서 운수장비 부문의 자산군의 비중을  $w = 0, 0.05, 0.10, \dots, 0.95, 1.0$ 의 비중으로, 비금속광물 부문의 자산군은  $1-w$ 의 비율로 포트폴리오를 구성한다. <표 1>에서 <표 4>까지 첫 번째 열의 비율  $w$ 는 포트폴리오에서 운수장비 부문의 자산군의 비중을 의미한다. 따라서  $w = 0$ 의 경우는 비금속광물 부문만 포함된 경우를,  $w = 1.0$ 의 경우는 운수장비 부문만 포함된 경우이다.

<표 1>에서 각 포트폴리오 수익률의 평균, 표준편차, 왜도 및 첨도에 대한 정보가 주어진다.  $w = 0$ 일 때 표준편차 값이 17.42인데  $w = 1.0$ 일 때는 표준편차 값이 19.67로 나타나, 이 기간 동안 운수장비 부문은 비금속광물 부문에 비해 상대적으로 고위험 (표준편차 기준), 고수익률의 특성을 보여주고 있다. 두 자산 간의 결합비율에서 운수장비 부문의 비중이 높아짐에 따라 평균 수익률의 값은 선형으로 증가함에 반하여 표준편차는  $w =$

4) 이 논문은 극한적인 위험의 분석에 주안점을 두고 있다. 이를 위해서는 충분한 자료의 확보가 분석의 선결조건인데, 이는 장기간의 자료가 필연적으로 내포하는 구조변동의 문제와 상충되는 측면이 있다. 이 논문에서는 이러한 구조변동의 문제를 일단 고려하지 않고 가능한 한 장기간의 자료의 확보에 우선순위를 두고 있음을 밝혀둔다. 차후에 상술되지만, 위의 자료의 경우에도, 예를 들어, 0.25%의 확률로 발생할 가능성이 있는 극단적인 사건의 분석에 사용 가능한 자료가 16개에 불과하다. 따라서 더 짧은 기간의 고려는 이와 같은 극단적 위험의 분석 결과의 강건성 (robustness)에 부정적인 영향을 미치게 된다.

0.35 일 때 표준편차 16.48 로 최소가 되는 불록성의 특성을 보인다.

표준편차와는 달리, 운수장비 부문의 경우 침도가 6.18 으로 비금속 광물 부문의 6.92 에 비해 상대적으로 낮은 수준인 것으로 관측되었다. 이는 위험의 성격에 따라 두 자산군 간에 다른 특성이 있음을 의미한다. 즉 표준편차에 의해서 특징 지워지는 일상적 규모의 위험과, 침도와 같은 척도에 의해 묘사되는 극단적인 위험의 크기가 두 자산군에 서로 반대로 나타남을 의미한다. 따라서 실증분석에 앞선 이론적 유추로부터, 다음의 결론이 미리 유도가 가능하다. 만약, 투자자가 평균-분산 모형과 같은 일상적인 위험에 관심을 가지는 전통적 의미의 위험선호체계를 가진 경우와 평균-VaR 모형 중 특히 Jansen, Koedijk and de Vries (2000) 류의 극단적인 하방위험에 대해 최적화하는 경우의 최적화 행위의 해가 각각 다른 방향으로 유도될 것임을 유추할 수 있다. 즉 후자의 경우 전자의 경우보다 운수장비 부문에 더 많은 투자가 이루어질 것이다.

앞의 3장에서 언급한 극치이론을 이용하여 추정<sup>5)</sup>한 꼬리지수 (tail index)  $a$ , 스케일 (scale) 값인  $A$  가 <표 1>에 주어져 있다. 순수하게 비금속광물 부문의 자산만으로 이루어진 포트폴리오의 경우  $a = 3.04$  에서 운수장비 부문의 비중을 늘려 갈수록 이 지수의 값이 대체적으로 증가 추세를 보이고, 순수하게 운수장비 부문만으로 이루어진 포트폴리오에서  $a = 3.54$  로 나타나, 분포의 꼬리가 상대적으로 덜 두터움을 보여준다.

<표 2>에서 각 포트폴리오에서 신뢰수준 95%, 99%, 99.5% 및 99.75% 수준, 즉  $\delta = 5\%$ ,  $1\%$ ,  $0.5\%$  및  $0.25\%$  에서의 VaR 값<sup>6)</sup>을 역사적 분포를 이용하여 계산 한 값과, 식 (5)에서의 방법으로 파레토분포 근사에 의해 추정한 값을 각각 비교하고 있다. 편의상 초기포지션금액을 1 로 표준화하여 <표 2>의 VaR 값은 “VaR/포트폴리오투자금액 = VaR/1 = VaR” 가 되어 투자원금에 대한 VaR의 비율을 나타내는 상대적 수치를 의미하는 것으로 해석이 가능하다.

역사적 VaR 의 경우  $\delta = 5\%$  에서는  $w = 0.30$ , 즉 30% 의 운수장

5) 익명의 논평자가 지적한 것과 같이 Hill의 방식을 통한 추정은 식 (4)에서  $m$ 의 크기를 정해야 하는 어려움이 있다. 본 논문에서 Danielsson, de Haan, Peng and de Vries (2000)에서 제시한 subsample bootstrap 방법에 의해  $m$ 을 추정 한 결과,  $w=0$  일 때  $m=123$ ,  $w=1.0$  일 때  $m=152$  로 각각 나타났다.  $m$ 이 너무 작은 값을 사용하면 추정치의 분산이,  $m$ 이 커지면 추정치의 편의가 커지는 특성을 감안하고, 모든 포트폴리오에서 각각 다르게 추정된  $m$ 의 사용으로부터 초래되는 추정량의 변동성을 최소화하기 위해  $m=123$  으로 고정하였다. 참고로  $m=67$  (0.1%의 꼬리에 해당하는 값)의 경우에도 본 논문의 결론과는 질적인 차이는 없음을 밝혀둔다.

6) 신뢰수준 95%, 99%, 99.5% 및 99.75% 에서 포트폴리오의 최대손실 가능액을 의미한다. 이 논문에서 편의상  $\delta = 5\%$ ,  $1\%$ ,  $0.5\%$  및  $0.25\%$  VaR로 각각 지칭한다.

비 부분의 자산군과 70%의 비금속광물 부분의 자산군으로 구성된 포트폴리오에서 가장 작은 VaR 값을 보인다.  $\delta = 0.25\%$ 에서는  $w = 0.15$ 로 나타나 신뢰수준에 따라 최소 수준의 VaR를 제공하는 포트폴리오 구성비가 달라짐을 알 수 있다. 이 결과를 식 (5)의 파레토분포 근사에 의해 추정된 값과 비교하여 보자. 극치이론을 이용한 경우,  $\delta = 5\%$ 에서는  $w = 0.40$ ,  $\delta = 0.25\%$ 에서는  $w = 0.55$ 로 나타나 두터운 꼬리의 특성을 가진 비금속광물의 비중이 상대적으로 작을 경우에 VaR의 최소값이 달성되는 것으로 나타났다. 최소위험을 달성하는 포트폴리오의 구성에 표준편차로 측정되는 경우와 다른 비율로 운송장비부분의 자산군이 포함됨을 보여준다.

### 3.1. Arzac & Bawa의 평균-VaR 모형에서의 최적화

추정된 VaR를 이용한 자산배분의 최적화 문제를 가상의 포트폴리오에서 다루어 보자. 먼저 제 2장에서 평균-VaR 모형에서의 최적화 결과, 즉 식 (2) 값을 이용한 결과가 <표 3>에 주어져 있다<sup>7)</sup>. 여기서 우리는 일상적인 수준에서의 위험과 좀 더 극단적인 수준에서의 위험이 포트폴리오 최적화에 미치는 영향을 분석하기 위해 고려 대상의 중 각각  $\delta = 5\%$ 와  $0.25\%$ 의 경우로만 한정하여,  $\delta = 5\%$ 는 통상적인 수준에서의 위험을 대표하는 것으로 그리고  $\delta = 0.25\%$ 는 극단적인 수준의 위험을 나타내는 것으로 간주하고 그 결과를 해석하였다. 각주 (2)에서 언급한 바와 같이 역사적 분포로 VaR를 추정하고자하는 경우  $\delta = 0.25\%$ 일 때  $m = 16$ 으로 이 수준보다 더 극단적인 위험은 표본 수의 제약으로 인한 추정의 신뢰성 저하를 우려하여 고려치 않는다. 각 경우에 위험은 VaR를 이용하여 추정하는데, VaR를 정규분포를 이용한 추정과 극치이론을 이용해서 추정한 경우를 각각 제시한다. 분포가정의 차이의 강건성(robustness)을 비교하기 위해 분포의 가정을 사용하지 않는 역사적 분포에 의한 VaR 값을 이용한 결과도 아울러 제시한다.

우선 정규분포를 이용한 VaR의 추정의 결과는 이론에서 예측되듯이  $\delta = 5\%$ 와  $0.25\%$  등의 신뢰수준에 상관없이 최적화의 결과는 동일한 것으로 나타났다.  $w = 0.55$ 로 운송장비 부분의 비중이 55%일 때 최적화되는 것으로 나타났다. 극치이론을 이용한 VaR 추정값을 이용하는 경우의 결과가 <표 3>의 두 번째 패널에 제시되어 있는데,  $\delta = 5\%$ 의 경우  $w = 0.80$ ,  $\delta$

7) 분석에 사용된 무위험금리는 김진호 (2002) 등 기존 연구방법처럼, 분석기간의 마지막 달 (2006년 11월)의 국고채 1년물의 금리 연율 4.7%를 사용하였다.

= 0.25% 의 경우  $w = 0.70$  으로 각각 나타났다. Hyung and de Vries (2002)와 같은 기존의 연구에서 밝혀졌듯이 파레토분포에 의한 분포 근사 방법은  $\delta = 5\%$  수준에서는 그 정확도가 많이 떨어지고, 일반적으로 극치이론은 분포의 꼬리부분에서 잘 적용되는 것으로 알려져 있다. 극치이론의 원래 목적이 극단적인 위험에 초점을 맞추므로 우리가 분석하는 자료에서 고려하는 가장 극단의 값인  $\delta = 0.25\%$  정도의 위험에 더 부합되는 것으로 간주할 수 있다. 이 경우에 최적선택의 비율이  $w = 0.70$ 으로 정규분포를 이용하는 경우에 비하여 훨씬 높은 비율로 운송장비부문의 자산을 포함하는 것으로 나타났다. 정규분포에 비하여 극치이론에 의한 VaR 추정은 표준편차와 같은 통상적 수준의 위험보다는 침도나 꼬리지수로 특징지워지는 극단적인 위험도에 더 좌우되는 것을 알 수 있다. 앞서 언급하였듯이 운송장비 부문의 경우 표준편차 기준으로는 더 위험한 자산이지만 침도 혹은 꼬리지수의 기준으로는 오히려 덜 위험한 자산이므로 위와 같은 상반된 실증분석 결과가 도출되었다.

분포에 대한 특별한 가정을 없이 VaR를 추정할 역사적 분포를 이용한 결과가 <표 3>의 마지막 패널에 제시되었다.  $\delta = 5\%$  의 경우  $w = 0.35$  이었지만  $\delta = 0.25\%$  로 주어지는 경우  $w = 0.75$ 로 운송장비부문의 비중이 높아지는 것을 볼 수 있다. 이는 분포의 가정과는 별개의 문제로, 고려 대상이 되는 위험도의 특성에 따른 차이로 해석이 가능하다. 즉 통상적인 수준의 위험도를 고려하는 경우와 극단적인 위험을 고려하는 경우의 차이로 보아야 한다. 특히  $\delta = 0.25\%$  와 같은 극단적인 영역에서의 VaR 추정 및 위험의 분석에는 정규분포보다는 파레토 분포 근사를 이용하는 두터운 분포모형이 더 적합하다는 사실을 직접적으로 확인하여 준다. (참고, Hyung and de Vries, 2002)

이 결과는 만약 투자자가 고려하는 위험이 통상적이고 대칭적인 위험, 즉 표준편차 혹은  $\delta = 5\%$  수준에서의 VaR 가 아닌, 좀 더 극단적인 혹은 비대칭적 위험을 고려하는 투자결정에 적합한 분포가정 및 모형에 대한 근거를 제시한다. 전통적인 재무이론에서의 평균-분산 모형과는 다른 입장을 취하는 Roy (1952)와 Arzac and Bawa (1977)의 하방위험 기피 혹은 안전 우선 이론이 이러한 측면과 잘 부합되는 이론으로 간주된다. 투자자가 일상화된 위험 혹은 양 방향으로의 (즉 주가가 상승하거나 하락하는) 위험 이외에 하방위험 혹은 채무불이행 위험(default risk)와 같은 극단적인 위험에 민감한 경우를 고려할 수 있는 대안이 된다. 이러한 특징을 가진 투자자의 최적화 행위는 극단적 위험을 나타내는 꼬리지수의 관점에서 덜 위험한 자산

인 운송장비 부문의 자산군에 상대적으로 더 많은 투자를 하는 것을 보다 선호한다.

### 3.2. 위험조정수익률 (Sharpe Ratio)의 최적화

평균-분산모형에서는 위험조정수익률을 Sharpe 비율로 나타내고 이를 최적화하는 포트폴리오 선택을 구한다. 이에 비해 평균-VaR 모형은 위험을 VaR를 사용하여 계산하므로, 김진호 (2002)의 방법을 따라 위험조정수익률 계산에 분산 대신 VaR를 대입하여 두 모형간의 결과를 비교한다. Campbell, Huisman and Koedijk (2001)가 이미 밝혔듯이 이론적으로는 식 (2)에서의 Arzac and Bawa (1977) 방식의 최적화 행위나 다음에서 제시되는 Sharpe ratio에서 VaR를 이용한 위험조정수익률은 정규분포 가정 하에서는 동일한 것으로 알려져 있다. 분석결과가 <표 4>에 주어져 있는데 <표 3>과 거의 동일한 결과를 보임을 알 수 있다.

표준편차와 VaR의 상호 비교분석을 위해 <표 4>에서는 아래의 위험조정수익률을 비교하였다. 각 모형에서의 위험조정수익률은 각각 다음과 같이 나타난다.

$$\text{평균-분산 모형: } \frac{r_p - r_f}{\sigma} \quad (8)$$

$$\text{평균-VaR 모형: } \frac{r_p - r_f}{VaR_\delta(r_p)} \quad (9)$$

여기서  $r_f$  은 무위험수익률,  $r_p$  는 포트폴리오 수익률,  $\sigma$  는 수익률의 표준편차,  $VaR_\delta(r_p)$ 는 신뢰수준  $\delta$  하에서의 VaR 값을 의미한다. 평균-분산 모형의 결과는 <표 4>의 첫 번째 열에 주어져 있다. 김진호 (2002) 등 기존의 연구에서 언급된 바와 같이, 많은 경우에 한 자산에만 집중 투자하는 구석해가 최적화의 결과로 나타나는 경우가 많다. 본 연구에서도 선택된 자산군 이외의 많은 경우에 이러한 결과를 보여준다<sup>8)</sup>. 이 논문에서 선택한 두 자산간의 최적화의 경우는  $w = 0.55$  로 앞의 3.1장에서 정규분포를 이용한 VaR 의 경우와 동일한 결론을 도출하였다. 이는 정규분포의 경우 위험의 측

8) 본 논문에서 18개 산업군 지수에 대한 분석을 진행하였다. 다른 산업군에 대한 분석결과도 저자에게 요청시 구할 수 있음을 밝혀둔다.

정에 분산을 이용하든, VaR의 형태를 취하든, 혹은 선택된 신뢰수준 등에 상관없이 동일한 결론을 유도하는 것으로, 정규분포의 분포적 특성으로부터 예견되는 결과이다.

평균-VaR 모형의 경우에는 위험조정수익률의 경우 VaR 값의 추정 방법, 혹은 고려하는 위험의 신뢰수준 등에 결과가 달라진다. 극치이론에 따른 파레토 분포를 이용하는 경우  $\delta = 0.25\%$  수준에서 최적화 수준은  $w = 0.70$  으로 나타나 앞의 분석과 동일한 결과를 얻었다. 역사적 분포를 이용한 분석 또한 고려 대상이 되는 위험의 수준에 따라, 즉  $\delta = 5\%$  에 해당하는 위험의 경우  $w = 0.35$  으로 분산을 사용한 경우와 비슷하게 유도되었다.  $\delta = 0.25\%$  의 경우는  $w = 0.75$  로 나타나, 3.1장에서의 분석과 동일한 결과를 도출하였다.

김진호 (2002)의 분석에서 분석의 대상이 되는 위험의 수준이 각각  $\delta = 5\%$ ,  $1\%$  수준이었던 점을 감안하면, 본 논문의 결과는 상호보완적인 결과를 제시한다. 좀 더 극단적인 수준의 위험  $\delta = 0.25\%$  수준에서는 보다 꼬리지수가 큰 (즉, 상대적으로 안전한) 자산 쪽으로 자산선택의 비중이 편중되는 결과를 보인다. 역사적분포를 이용한 결과는 두 가지 측면을 뚜렷하게 부각 시켜준다. 위험을  $\delta = 5\%$  의 수준에서 파악하는 경우 상대적으로 표준편차가 작은 자산으로 편중된 즉  $w = 0.35$  포트폴리오를, 위험을  $\delta = 0.25\%$  의 수준에서 파악하는 경우 상대적으로 꼬리 위험이 작은 자산으로 편중된 즉  $w = 0.75$  수준의 포트폴리오가 각각 최적화된 것으로 나타났다. 위험의 수준이 각각  $\delta = 5\%$ ,  $1\%$  수준에서는 수익률의 분포의 차이가 크게 문제되지 않지만,  $\delta = 0.25\%$  와 같은 극단적인 위험을 고려하는 경우 수익률의 분포의 차이는 결과에 차이를 초래할 가능성이 있음을 보여준다.

이상의 결과는 고려대상이 되는 위험의 차이 ( $\delta = 5\%$  혹은  $\delta = 0.25\%$ ), 위험의 측정 방법의 차이 (분산 혹은 VaR), 분포가정의 차이 (정규분포 혹은 꼬리가 두터운 분포)가 최적화 결과의 차이를 가져오는 것을 확인하였다. 그리고 Campbell, Huisman and Koedijk (2001)이 밝혔듯이 식 (9)의 위험조정수익률을 통한 평균-VaR 모형의 사용이나 Arzac and Bawa (1977)에 의한 식 (2)를 사용하는 등과 같은 방법론의 차이는 최적화 결과에 차이를 가져오지 않는 것으로 확인되었다.

#### 4. 맺음말

이 논문에서의 의의는 무엇보다도 위험관리의 이론적인 부분의 실증적 검증과정이 그 첫 번째이다. 최적자산배분에서 사용하는 위험도의 척도를 통상적으로 사용하는 분산 혹은 표준편차를 사용하지 않을 경우를 분석하였다. 현실적으로 투자자의 선호체계를 반영하는 손실기피(limited down side risk) 선호를 가진 경우, 분산 혹은 표준편차보다는 하방 위험성에 더 관심을 가지게 되는데 이러한 경우에 최적자산배분의 결과가 어떻게 달라지는지 분석하였다. 아울러 서로 다른 방식으로 측정되는 위험이 최종적인 결과에 어떤 영향을 미치는지 분석하면, 이는 관심의 대상이 되는 위험의 종류에 따른 최적화 행위를 구분하여 분석이 가능하다. 즉, 일상적인 위험을 대표하는 표준편차와 극단적인 위험을 분석하는데 유리한 준모수적 방법으로 추정된 VaR는 최적화행위에 각각 다른 결론을 유도하는 것으로 나타났다.

하방위험을 고려하는 선호체계에서 VaR를 위험의 척도로 사용하는 것은 최근의 은행규제에서 사용하는 방식에 부합될 뿐만 아니라 투자자들의 하방위험의 최소화 성향을 잘 설명한다. 특히 Basle Committee for Banking Regulation에 의해 은행의 자본에 대한 적정수준의 요구에 VaR가 사용되어지고 있고, 특히 한국의 경우 신바젤협약(Basle New Agreement)을 2008년부터 사용할 예정이라는 현실을 직시하면 위험의 척도로서 VaR의 사용이 점점 확산될 것으로 예상된다. 그러나 이러한 분석이 대부분 통상적인 수준의 위험(대부분 5% 혹은 1% 수준의 위험을 고려)으로 한정되어 있다. 개별 은행의 파산위험, 금융 시스템의 붕괴, 국가 간의 금융 시스템 붕괴의 전이효과(contagion effect) 등과 같은 극단적인 위험에 대한 관리가 은행체계의 안정성을 추구하는 정책입안자의 목적 중 하나라는 사실을 고려할 경우, 위험의 측정에서 극한적인 사건의 발생으로 인한 위험을 고려할 필요성이 제기된다. 이러한 연구에 본 논문에서 발견된 실증적 분석 결과를 고려하는 것이 필요할 것으로 기대된다.

## 5. 참고문헌

김진호, 2002. “평균-분산 모형과 평균-VaR 모형간 최적위험자산배분 전략 비교.” 재무연구, 제15권, 제2호, pp 143-172.

Artzner, P., Delbaen, F., Eber J.M., Heath, D., 1999, "Coherent Measures of Risk", *Mathematical Finance* 9, 203-228.

Arzac, E.R., Bawa, V.S., 1977, "Portfolio choice and equilibrium in capital markets with safety-first investors", *Journal of Financial Economics* 4, 277-288.

Campbell, R., Huisman, R., Koedijk, K., 2001, "Optimal portfolio selection in a Value-at-Risk framework", *Journal of Banking and Finance*, 25, 1789-1804.

Danielsson, J., L. de Haan, L. Peng, de Vries, C.G., 2000, "Using a bootstrap method to choose the sample fraction in tail index estimation", *Journal of Multivariate Analysis* 76, 226-248.

Danielsson, J., Jorgensen, B.N., Samorodnitsky, G., Sarma, M., de Vries, C.G., 2005, "Subadditivity Re-Examined: the Case for Value-at-Risk" Working paper, London School of Economics.

Feller, W., 1971. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. II, Wiley, New York.

Geluk, J., de Haan, L., 1987. "Regular variation, extensions and Tauberian theorems", CWI Tract 40, Amsterdam.

Gourieroux, C., Laurent, J.P., Scaillet, O., 2000, "Sensitivity analysis of values at risk", *Journal of Empirical Finance* 7, 225-246.

Hill, B.M., 1975. "A simple general approach to inference about the

tail of a distribution", *Annals of Statistics*, 3(5), 1163-1173.

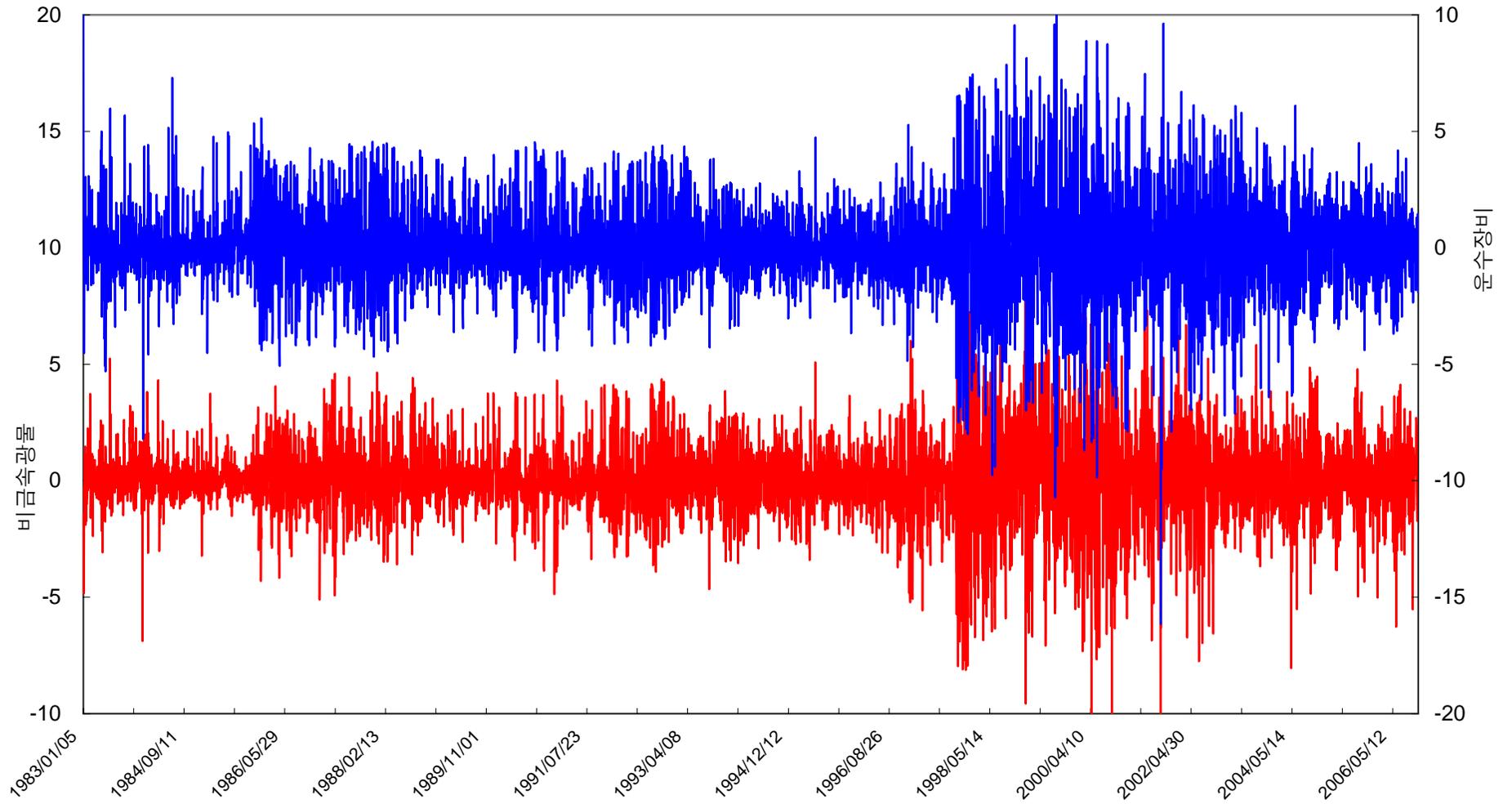
Hyung, N., de Vries, C.G., 2002. "Portfolio Diversification Effects and Regular Variation in Financial data", *Journal of the German Statistical Society* 86, 69-82.

Hyung, N., de Vries, C.G., 2007. "Portfolio Selection with Heavy Tails", *Journal of Empirical Finance*, forthcoming.

Jansen, D., Koedijk, K.G., de Vries, C.G., 2000. "Portfolio selection with limited downside risk", *Journal of Empirical Finance* 7, 247-269.

Roy, A.D., 1952. "Safety first and the holding of assets" *Econometrica* 20, 431-449.

<그림 1> 비금속광물부문, 운수장비부문 자산군 지수의 수익률 (%)



<표 1> 자료의 기술통계량 및 Tail Index 추정값

비율	평균	표준편차	왜도	첨도	alpha	A
0.00	0.279	17.42	-0.19	6.92	3.04	1.046
0.05	0.280	17.17	-0.21	6.96	3.14	0.768
0.10	0.281	16.96	-0.22	6.99	3.10	0.833
0.15	0.282	16.79	-0.24	7.01	3.22	0.561
0.20	0.283	16.65	-0.25	7.02	3.32	0.408
0.25	0.284	16.56	-0.25	7.03	3.36	0.354
0.30	0.285	16.50	-0.25	7.02	3.49	0.233
0.35	0.285	16.48	-0.25	7.01	3.53	0.204
0.40	0.286	16.51	-0.25	6.98	3.33	0.361
0.45	0.287	16.57	-0.23	6.94	3.37	0.314
0.50	0.288	16.68	-0.22	6.89	3.38	0.306
0.55	0.289	16.82	-0.20	6.84	3.48	0.231
0.60	0.290	17.01	-0.18	6.77	3.42	0.277
0.65	0.291	17.23	-0.16	6.71	3.32	0.382
0.70	0.292	17.48	-0.13	6.63	3.46	0.260
0.75	0.293	17.77	-0.10	6.56	3.31	0.409
0.80	0.294	18.09	-0.08	6.48	3.26	0.491
0.85	0.295	18.44	-0.05	6.40	3.38	0.359
0.90	0.295	18.82	-0.02	6.32	3.47	0.293
0.95	0.296	19.23	0.00	6.25	3.57	0.229
1.00	0.297	19.67	0.03	6.18	3.54	0.263

주. 위의 표의 값은 원래의 수치를 각각 1,000배 (평균, 표준편차), 1,000,000배 (A) 및 100배 (VaR) 한 수치이다. alpha 는 꼬리지수(tail index), A 는 scale 그리고 VaR(x)는 각 각 x% 에서 추정된 VaR를 의미하고, VaR 계산에 사용된 현재 주가는 1로 표준화하였다.

<표 2> VaR 추정값: 역사적 VaR 추정값과 Fat-tail 분포를 이용한 VaR 수준

비율	Fat-tail 이용한 VaR		역사적 VaR	
	VaR(5.0)	VaR(0.25)	VaR(5.0)	VaR(0.25)
0.00	2.903	7.767	2.631	7.137
0.05	2.922	7.592	2.609	7.052
0.10	2.863	7.534	2.552	7.014
0.15	2.904	7.361	2.529	6.972
0.20	2.927	7.220	2.519	7.010
0.25	2.920	7.130	2.518	6.952
0.30	2.963	6.994	2.500	7.203
0.35	2.961	6.926	2.506	7.249
0.40	2.850	7.013	2.530	7.186
0.45	2.867	6.971	2.565	7.207
0.50	2.872	6.964	2.612	7.202
0.55	2.923	6.916	2.611	7.117
0.60	2.905	6.976	2.626	7.096
0.65	2.871	7.082	2.680	7.194
0.70	2.964	7.048	2.715	7.097
0.75	2.918	7.204	2.749	7.053
0.80	2.919	7.311	2.823	7.311
0.85	3.016	7.312	2.852	7.348
0.90	3.099	7.351	2.909	7.479
0.95	3.196	7.398	2.943	7.527
1.00	3.233	7.533	2.997	7.504

주. 위의 표의 값은 원래의 수치를 각각 1,000배 (평균, 표준편차) 및 100배 (VaR) 한 수치임. 역사적 VaR (x)는 각각 역사적 분포로부터 x% 에 해당되는 quantile을 이용하여 추정한 VaR를 의미하고, VaR 계산에 사용된 현재 주가는 1로 표준화하였다.

<표 3> Arzac & Bawa 평균-VaR 모형에서의 최적화

비율	정규분포		Fat-Tail 분포		역사적 분포	
	VaR(5.0)	VaR(0.25)	VaR(5.0)	VaR(0.25)	VaR(5.0)	VaR(0.25)
0.00	0.3158	0.1856	0.312	0.117	0.3438	0.127
0.05	0.3235	0.1901	0.313	0.121	0.3500	0.130
0.10	0.3308	0.1944	0.322	0.123	0.3614	0.132
0.15	0.3374	0.1983	0.321	0.127	0.3682	0.134
0.20	0.3435	0.2018	0.322	0.131	0.3733	0.135
0.25	0.3488	0.2050	0.325	0.134	0.3770	0.137
0.30	0.3533	0.2076	0.324	0.138	0.3833	0.134
0.35	0.3569	0.2098	0.327	0.140	<b>0.3861</b>	0.134
0.40	0.3597	0.2114	0.343	0.140	0.3860	0.137
0.45	0.3616	0.2125	0.344	0.142	0.3842	0.137
0.50	0.3627	0.2131	0.347	0.143	0.3808	0.139
0.55	<b>0.3629</b>	<b>0.2132</b>	0.344	0.146	0.3844	0.142
0.60	0.3622	0.2129	0.349	0.146	0.3857	0.143
0.65	0.3608	0.2120	0.356	0.145	0.3814	0.143
0.70	0.3587	0.2108	0.348	<b>0.147</b>	0.3799	0.146
0.75	0.3560	0.2092	0.357	0.145	0.3784	<b>0.148</b>
0.80	0.3528	0.2073	<b>0.360</b>	0.144	0.3718	0.144
0.85	0.3491	0.2051	0.351	0.145	0.3712	0.145
0.90	0.3450	0.2027	0.345	0.146	0.3671	0.143
0.95	0.3406	0.2001	0.337	0.146	0.3659	0.144
1.00	0.3359	0.1973	0.336	0.145	0.3625	0.145

주. 위의 표의 값은 원래의 수치를 각각 100배 한 수치임. 진하게 표시된 경우가 최적화하는 포트폴리오임. VaR(x) 는 각각 x% 에서 추정된 VaR를 의미하고, VaR 계산에 사용된 현재 주가는 1로 표준화하였다.

<표 4> 위험조정수익률 (Sharpe ratio) 비교

비율	정규분포	Fat-Tail 분포		역사적 분포	
	표준편차	VaR(5.0)	VaR(0.25)	VaR(5.0)	VaR(0.25)
0.00	0.5229	0.314	0.1173	0.3462	0.128
0.05	0.5357	0.315	0.1212	0.3526	0.130
0.10	0.5478	0.324	0.1233	0.3641	0.132
0.15	0.5589	0.323	0.1275	0.3709	0.135
0.20	0.5689	0.324	0.1312	0.3761	0.135
0.25	0.5777	0.328	0.1341	0.3798	0.138
0.30	0.5852	0.326	0.1380	0.3862	0.134
0.35	0.5912	0.329	0.1407	<b>0.3890</b>	0.134
0.40	0.5959	0.345	0.1403	0.3889	0.137
0.45	0.5990	0.346	0.1424	0.3870	0.138
0.50	0.6007	0.349	0.1439	0.3835	0.139
0.55	<b>0.6009</b>	0.346	0.1462	0.3872	0.142
0.60	0.5999	0.351	0.1462	0.3884	0.144
0.65	0.5975	0.358	0.1453	0.3841	0.143
0.70	0.5940	0.350	<b>0.1473</b>	0.3825	0.146
0.75	0.5895	0.359	0.1454	0.3810	<b>0.149</b>
0.80	0.5840	<b>0.362</b>	0.1445	0.3743	0.145
0.85	0.5778	0.353	0.1457	0.3736	0.145
0.90	0.5709	0.347	0.1462	0.3695	0.144
0.95	0.5636	0.339	0.1465	0.3682	0.144
1.00	0.5557	0.338	0.1451	0.3648	0.146

주. 위의 표의 값은 원래의 수치를 각각 100배 한 수치임. 진하게 표시된 경우가 위험조정수익률을 최적화하는 포트폴리오임. VaR(x)는 각 각 x% 에서의 추정된 VaR를 의미하고, VaR 계산에 사용된 현재 주가